

03. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法の第1形式

自然数 n に関する命題 $P(n)$ が2つの条件

- (1) $P(1)$ は成り立つ
- (2) $P(k)$ が成り立つならば $P(k+1)$ も成り立つ、
を満たすとする。
このとき、すべての自然数 n にたいして $P(n)$ は成
り立つ。

数学的帰納法の第2形式

自然数に関する命題 $P(n)$

- (1) $P(1)$ は成立
- (2) $n=1, 2, \dots, k$ のとき, $P(n)$ が成立するならば
 $n=k+1$ のときも $P(n)$ が成立

このときすべての自然数 n に対して $P(n)$ は成立

数学的帰納法の変型1

整数 n に関する命題 $P(n)$

- (1) ある一つの整数 m について $P(m)$ が成立
 - (2) $P(k)$ が成立するならば $P(k+1)$ も成立
- このとき, m 以上のすべての整数 n に対して
 $P(n)$ は成立する。

数学的帰納法の変型2

整数 n に関する命題 $P(n)$

- (1) $P(0)$ が成立
- (2) $P(k)$ が成立するならば, $P(k\pm 1)$ も成立
(符号に注意)

このとき, すべての整数 n に対して $P(n)$ は成立

自然数の整列性

自然数の, 空でない任意の集合 A には
最小数が存在する。

問題

$S(n) = 1 + 2 + \dots + n$ と定義すると
すべての自然数について

$$S(n) = \frac{n(n+1)}{2} \text{ である}$$