2008年5月26日

代数I　中間試験

各設問の空白を埋めよ．

問題1　（集合について）

数学において，明確に限定された対象を一まとめにしたものを$\boxed{}$という．集合を構成する要素のことを$\boxed{}$というのが普通である．この集合を定義するには2通りの方法がある．

(1) $\boxed{}$ ⋯ これは一つの集合を定義するのに，その要素を漏れなく重複無く列挙する方法である．

(2) $\boxed{}$ ⋯ 対象 x がその集合の要素になるための必要十分条件を示す方法である．

ある対象 x が集合 S の要素であることを

$$x \in S(\text{所属記号})$$

で表し，”x は S に属する”と読む．元の個数が有限な集合を$\boxed{}$といい，これに対して，元の個数が無限な集合を$\boxed{}$という．また，元を1つも含まない集合（元の個数0）を$\boxed{}$といい，

$$\phi = \{\quad\}$$

と表す．

問題2　（条件）

数学では条件 $p(x)$ が成り立てば条件 $q(x)$ も成り立つことを

$$p(x) \to q(x)\ \text{（含意記号）}$$

と書き，”$p(x)$ ならば $q(x)$”とよむ．このとき，

$p(x)$ は $q(x)$ が成り立つための$\boxed{}$

$q(x)$ は $p(x)$ が成り立つための$\boxed{}$

という．

問題3　（包含関係）

(1) 任意の集合 A に対して，$A \subseteq A$ が成り立つ

(2) もし$\boxed{}$かつ $B \subseteq A$ ならば，$\boxed{}$である．

(3) もし$\boxed{}$かつ$\boxed{}$ならば，$A \subseteq C$ である．

問題 4 （内包と外延）

２つの集合

$$A = \{x|p(x)\}, \quad B = \{x|q(x)\}$$

に対して，内包と外延の関係

$\boxed{}$	$A \cup B$	$= \{x|px \vee q(x)\}$
共通集合	$\boxed{}$	$= \{x|px \wedge q(x)\}$

が成り立つ．

問題 5 （数学的帰納法の原理）

自然数のある集合 S が，2 つの条件：

(1) $\boxed{}$

(2) $\boxed{}$

を満たすとする．このとき，

$$S = N \text{（自然数全体の集合）}$$

となる．

問題 6 （代数的構造）

ある集合に対していくつかの四則演算などの公理や定義を用いれば，代数的構造を備えたシステム，いわゆる代数系が得られる．したがって，基礎となる集合が同じであっても異なる公理を用いれば異なる構造が得られる．

集合 $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ は演算 $x * y = |x - y|$ に関して，閉じている．すなわち，S はこの演算に関して $\boxed{}$ の構造を持つ．また，同じ集合 S に対して，$x * y = \max\{x, y\}$ と定義するならば，閉鎖律と結合律を満たすため，S は $\boxed{}$ となる．

ある集合に対してある演算が定義でき，閉鎖律と結合律を満たし，$\boxed{}$ と $\boxed{}$ が存在するならば，その集合はその演算において群をなすという．

問題 7 （群）

集合 $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ に対して次の演算

$$x * y = x + y \pmod 5$$

を定義するとき，群となることを示せ.

(21)

問題 8 （カタラン数の例）

３×３の升目の左上から右下への経路の数について考える．ただし，対角線より下の経路は通らないこととする．下記に示すカタラン数の公式と照らし合わせて，経路の数とカタラン数の関係について考察せよ.

$$c(n) = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$$

(22)