

11. ブール環

代数1

基本事項

- ・ n個の元からなる集合
 $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$
- ・ 有限集合Sがn個の元からなるならば、Sの部分集合は全部で 2^n 個ある
- ・ ベキ集合・・・集合Sのすべての部分集合の全体をSのベキ集合と呼ぶ
 $P(S) = \{S, \phi, A, B, C, \dots\}$
A, B, C, ...はSの部分集合である

ベキ集合が環となるために

- (1) P(S)は加法A+Bに関して可換群
 - (2) P(S)は乗法ABに関して半群
ただし、乗法に関する単位元が存在
乗法において可換
 - (3) 分配律
 $A(B+C) = AB+AC$
 $(B+C)A = BA+CA$
- 乗法で可換であれば、分配律は片側で省略できる

加法を定義

- ・ AとBの加法をAとBの合併集合A∪Bから共通集合A∩Bを除外してできる部分集合と定義
 $A+B = A \cup B - A \cap B$
- 閉鎖律: A+BもSの部分集合
結合律: $(A+B)+C = A+(B+C)$
可換律: $A+B = B+A$

乗法を定義

$$AB = A \cap B$$

- 閉鎖律: $A \cap B$ もSの部分集合
結合律: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
可換律: $A \cap B = B \cap A$

ブール環の表現

- ・ 2進n桁数
- ・ 2つの2進数の加法と乗法をそれぞれ各桁におけるmod2の和と積をとるとする。
- この演算に繰り上げはないとする。

11010	11010
+10110	×10110
-----	-----
01100	10010