１２．ハミルトンの4元数

代数１

問題　合同式を解く

3^{89}を7で割った余りを求めよ

$3^{89} \equiv x \pmod 7$のxを求める問題である
ここで、わかっていることは
フェルマーの定理から
$3^{6} \equiv 1 \pmod 7$である

$$3^{89} = 3^{6\times 14+5} = \left(3^{6}\right)^{14} \cdot 3^{5} \equiv (1)^{14} \cdot 3^{5} \pmod 7$$
$$\equiv 3^{2} \cdot 3^{2} \cdot 3 \equiv 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12 \equiv 5 \pmod 7$$

10^{100}を17で割った余りを求めよ

$10^{100} \equiv x \pmod{17}$の$x$を求める問題である
ここで、わかっていることは
フェルマーの定理から
$10^{16} \equiv 1 \pmod{17}$である

$$10^{100} = 10^{16\times 6+4} = \left(10^{16}\right)^{6} \cdot 10^{4} \equiv (1)^{6} \cdot 10^{4} \pmod{17}$$
$$\equiv \left(10^{2}\right)^{2} \equiv (-2)^{2} = 4 \pmod{17}$$

代数学の基本定理（ガウス、1799）

- n次の代数方程式は、重複度を数えれば、複素数の範囲で必ずn個の根を持つ

アーベルの定理

「n≧5なるとき、一般n次方程式は四則演算とベキ根によって解くことは出来ない」

ハミルトンの4元数

$$a + bi + cj + dk$$

$$\boxed{i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1}$$

各自で確認すること

$$\boxed{\begin{array}{l} ij = k,\ jk = i,\ ki = j \\ ji = -k,\ kj = -i,\ ik = -j \end{array}}$$

4元数の逆元

$$\boxed{\begin{array}{l} (a + bi + cj + dk) \cdot x = 1 \\ \text{を満たす}x\text{を求めよ} \end{array}}$$

数学の意味

アルキメデスの公理

- 任意の整数a,bに対して、b<naとなるような自然数nが存在する。

有理性の稠密性

- 数直線上の任意の2点x,y (x<y) の間には少なくとも一つの、従って無限個の有理数が存在する。