

# 代数 1 (2010 前期)

## 試験対策

平成 22 年 7 月 17 日

- [1]  $n$  を正の整数とするととき,  $2^{n+1} + 3^{2n-1}$  は 7 で割り切れることを証明せよ .
- [2]  $n$  を 2 以上の自然数とするととき,  $(1+a)^n > 1+na$  を証明せよ .
- [3] ハミルトンの 4 元数において  $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$  から 6 つの条件を導きなさい .
- [4] ハミルトンの 4 元数において, 乗法における逆元を求めよ .
- [5] 複素数における任意の元の乗法における逆元を求めよ .
- [6]  $\mathbb{Z}_3$  について次の問題に答えよ .
- (a)  $\mathbb{Z}_3$  は体か?
  - (b)  $\mathbb{Z}_3^* = \mathbb{Z}_3 - \{0\}$  は乗法群か?
- [7]  $\mathbb{Z}_6$  について次の問題に答えよ .
- (a) 元をすべて答えよ
  - (b) 部分集合を答えよ
  - (c) 加法において群か
  - (d) 乗法において群となるための部分集合を答えよ .
- [8] 法 9 の剰余類  $\mathbb{Z}_9$  について次の問題に答えよ .
- (a)  $\mathbb{Z}_9$  のすべての元を示せ .
  - (b) 0 を除いた集合  $\mathbb{Z}_9^*$  の元を示せ .
  - (c) 既約剰余類  $\mathbb{Z}_9^\times$  の元を示せ .
  - (d)  $\mathbb{Z}_9$  が加法において群となるか調べよ .
  - (e)  $\mathbb{Z}_9^\times$  が乗法において群となるか調べよ .
- [9]  $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{2, 3, 5, 7\}$  とするとき ,
- (a)  $A \cap B, A \cup B, A \setminus B$  を外延的定義法で記述しなさい .
  - (b)  $A \cup B$  の部分集合の個数は何個か?
- [10] 次の合同式の四角を埋めよ .

- (a)  $8^{180} \equiv \square \pmod{7}$
- (b)  $5^{210} \equiv \square \pmod{7}$
- (c)  $10^{108} \equiv \square \pmod{9}$
- (d)  $7^{120} \equiv \square \pmod{6}$
- (e)  $18^{35} \equiv \square \pmod{19}$
- (f)  $12^{28} \equiv \square \pmod{7}$
- (g)  $3^{72} \equiv \square \pmod{7}$
- (h)  $11^{49} \equiv \square \pmod{7}$
- (i)  $4^{30} \equiv \square \pmod{9}$
- (j)  $5^{210} \equiv \square \pmod{7}$
- (k)  $13^{14} \equiv \square \pmod{14}$
- (l)  $13^{21} \equiv \square \pmod{11}$
- (m)  $9^{2503} \equiv \square \pmod{8}$
- (n)  $11^{1513} \equiv \square \pmod{122}$

[11]  $1^{30} + 2^{30} + \dots + 10^{30} \pmod{11}$  を計算せよ .

[12] オイラーの公式を説明せよ .

[13] ある集合  $A, B$  に対して加法を  $(\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$  そして , 乗法を  $A \cap B$  とおいたとき , ブール環となることを示せ .

[14] ブール環において結合律が成り立つことを示せ .

[15] 単位元  $1$  を持つ環  $R$  で , 各元  $a$  がベキ等律 ( $a^2 = a$ ) を満たすとき ,  $2a = 0$  を満たすことを示せ .

[16]  $\mathbb{Z}_4$  は体か ? 演算表を用いて求めよ .

[17] 複素数が体であるか調べよ .

[18] カタラン数の公式を書け .

[19]  $2^{1001} \equiv 1 \pmod{100}$  は正しいか ?

[20]  $S = \{1, 3, 5, 7\} \pmod{8}$  は乗法について群となるか調べよ .

[21] 8 角形の交わらない対角線で 3 角形を作る方法は何通りか ?

[22]  $A = \{x|p(x)\}, B = \{x|q(x)\}$  の合併集合と共通部分を答えよ .

[23]  $S = \{1, 5, 7, 11\} \pmod{12}$  は乗法について群となるか調べよ .

[24] 2 次の正方行列において単位元として  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , 虚数単位元として  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  を用いて次の行列と乗法における逆元を求めよ.

(a)  $xi + 3y$

(b)  $2xi + y$

(c)  $x - 2yi$

[25] 1 の  $n$  乗根に関する問題

[26] 位数 5 のべき集合に対してブール環のとき, 二つの集合  $A = \{a_1, a_2, a_4\}$  と  $B = \{a_1, a_3, a_4\}$  に対して, 和と積を求めよ.

[27] ド・モルガンの法則をベン図を使わずに証明せよ.

(a)  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

(b)  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

[28]  $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$  をヴェン図で示せ.

[29]  $a = x_1 + y_1i, b = x_2 + y_2i$  に対して次の計算をせよ.

(a)  $(a + b)(a - b)$

(b)  $(a + b)^2$

(c)  $(a - b)^2$

[30]  $\mathbb{Z}_8$  の元と演算に関して, 体となる部分集合を求めよ.

[31]  $\mathbb{Z}_6$  の和と積の演算表を作成せよ.

[32]  $G = \{0, 2, 4, 6\} \pmod{7}$  について考えよ. (?)

[33]  $i$  を 2 乗するとマイナスになる理由を答えよ. (?)

[34] 3 個の連続した自然数の 3 乗の和は 9 で割り切れることを証明せよ.

[35] ハミルトンの 4 元数は乗法において体であることを示せ.

[36]  $\mathbb{Z}_6$  について

(a) 元を全て示せ.

(b) 部分集合を答えよ.

(c) 加法において群を示せ.

(d) 乗法において群となるか調べよ.

[37] 任意の複素数の逆元を求めよ.

[38] 演算表を作って閉鎖律, 結合律, 単位元, 逆元について調べる.

[39] 複素数  $z = x+iy$  の極形式  $r(\cos \theta + i \sin \theta)$  とあらわされる . ただし ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  ,  
 $\cos \theta = \frac{x}{r}$  ,  $\sin \theta = \frac{y}{r}$  である . このとき , 2 次の行列  $\begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}$  はどのようにあらわ  
されるか ?

[40] 普通の加法と乗法において加法群 , 乗法群 , 環 , 整域 , 体となる集合の例を示せ .