01. 集合

河野敏行

集合とは

- *ものの*集まり
- 集合を構成している*もの*をその集合の
  *要素*あるいは*元*という

- 数の集合
  自然数，整数，有理数，実数，複素数

数

- 数の種類

<u>物を受け渡す</u>
昨日は3個だったのに1個少ない（-1）
リンゴ2個を食べて0個

<u>計算</u>
２乗すると-1になる数（虚数）

$$x^2 = -1 (= i)$$

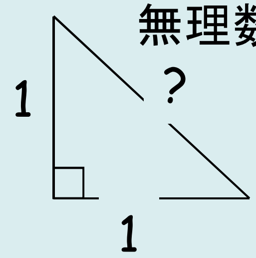
自然数	整数	有理数	実数	複素数
$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$

<u>数を数える</u>
リンゴが1個
ゾウが1頭

<u>分ける</u>
リンゴ2個を4人で分けると一人当たり

$$\frac{1}{2}$$

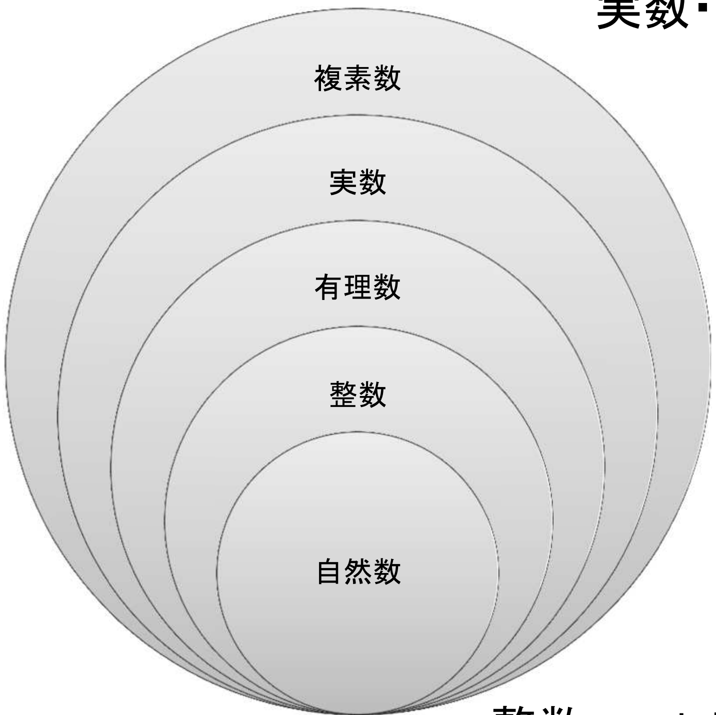
<u>計る</u>
ピタゴラスの定理から無理数の存在



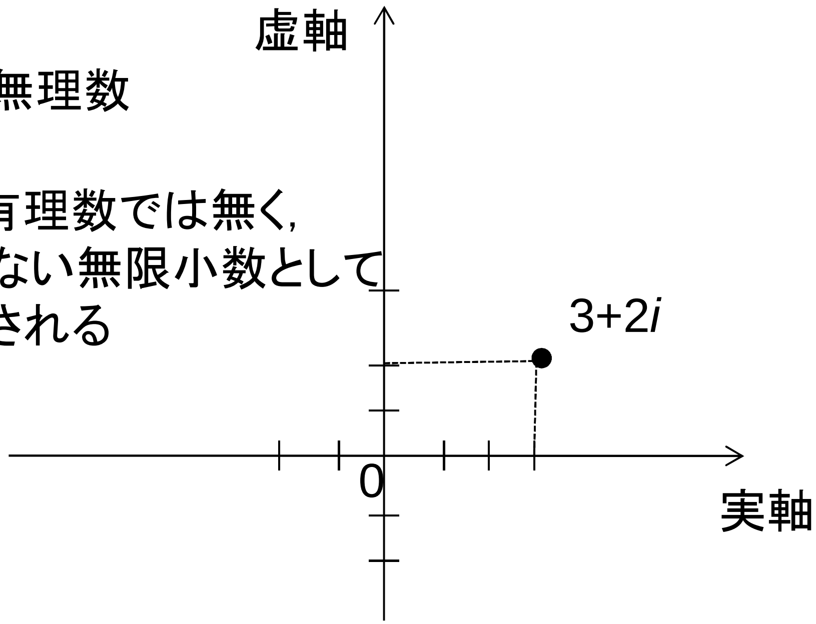
$$\sqrt{2}$$

数の構造

複素数・・・実数と虚数



実数・・・有理数と無理数



無理数・・・有理数では無く,
循環しない無限小数として
あらわされる

有理数・・・整数の比で表わされる数,
小数や，分数の形で表わされる

整数・・・±自然数と0がある

自然数・・・1があり，自然数に1を足した数も自然数である

虚数の世界

- 虚の時間･･･天才物理学者ホーキング
  ビックバン以前には，時間もモノも何もないとする考え方と違い，そのまま虚の時間が続いているという
- 複素平面･･･ガウス平面
- ガウス･･･n次方程式は複素数の範囲でn個の解をもつ

集合の定義

- 外延的定義法

$$S = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

- 内包的定義法

$$S = \{x \mid x\text{は整数で},0 \le x \le 9\}$$

記号で表そう

- 2の倍数かつ3の倍数である集合

- ３の倍数であるが2の倍数でない集合

2の倍数かつ3の倍数である集合

$$A = \{ x \in N \mid x = 2a, \ \ x = 3b, \ \ a, b \in N \}$$

$$A = \{ x \in N \mid x = 2a \ \wedge \ x = 3b, \ \ a, b \in N \}$$

$$A = \{ x \in N \mid x = 6a, \ \ a \in N \}$$

$$A = A_1 \cap A_2$$

$$A_1 = \{ x \in N \mid x = 3a, \ \ a \in N \}$$

$$A_2 = \{ x \in N \mid x = 2a, \ \ a \in N \}$$

３の倍数であるが2の倍数でない集合

$$A = \left\{ x \in N \middle| x \neq 2a,\quad x = 3b,\quad a, b \in N \right\}$$

$$A = \left\{ x \in N \middle| x \neq 2a \ \wedge\ x = 3b,\quad a, b \in N \right\}$$

$$A = A_1 \cap A_2$$

$$A_1 = \left\{ x \in N \middle| x = 3a,\quad a \in N \right\}$$

$$A_2 = \left\{ x \in N \middle| x \neq 2a,\quad a \in N \right\}$$

包含関係の性質

(1)[反射律]

任意の集合Aに対して，$A \subseteq A$が成り立つ

(2)[反対称律]

もし$A \subseteq B$かつ$B \subseteq A$ならば，$A = B$である

(3)[推移律]

もし$A \subseteq B$かつ$B \subseteq C$ならば，$A \subseteq C$である

集合の演算と法則

- 全集合 Ω をとする集合 A, B すなわち，
  $A, B \subseteq \Omega$ なる集合 A, B に対して，
  これらの２項演算として
  - 和集合（合併集合）
    $$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{または} x \in B\}$$
  - 積集合（共通部分）
    $$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{かつ} x \in B\}$$
  - 対称差集合
    $$A \triangle B = \{x \mid x \in A \cup B \text{かつ} x \notin A \cap B\}$$

集合算の公式

可換律

$$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$$

結合律

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

分配律

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

問1：集合の演算をせよ

$$\Omega = \{x \mid x : \text{整数}, 1 \le x \le 20\}, A = \{x \mid x : 2\text{の倍数}\}$$

$$B = \{x \mid x : 3\text{の倍数}\}, C = \{x \mid x : 4\text{の倍数}\}$$

$$A \cup B = \{2,3,4,6,8,9,10,12,14,15,16,18,20\}$$

$$A \cap B = \{6,12,18\}$$

$$B \cup C = \{3,4,6,8,9,12,15,16,18,20\}$$

$$B \cap C = \{12\}$$

$$A \triangle B = \{2,3,4,8,9,10,14,15,16,20\}$$

$$B \triangle C = \{3,4,6,8,9,15,16,18,20\}$$

補集合

$$\Omega = \{x | x:\text{整数}, 1 \le x \le 10\},$$

$$A = \{1,3,5,8,9\}, B = \{2,4,5,7,8,10\}$$

$$\overline{A} = \{2,4,6,7,10\}$$

$$\overline{B} = \{1,3,5,8,9\}$$

集合Aの集合Bに関する補集合

$$B - A = \{x | x \in B \text{かつ} x \notin A\} = B \cap \overline{A}$$

$$= \{2,4,7,10\}$$

数え上げ

$$|A|+|\overline{A}|=|\Omega|$$

$$|A\cup B|+|A\cap B|=|A|+|B|$$

- あるクラスに学生が４０人いるとする．そのうち，国語が好きな学生は２３人，数学が好きな学生は１５人，国語も数学も好きな学生は7人いたとする．このとき，クラスにいる４０人の学生の集合を全集合 Ω ，そのうち国語が好きな学生の集合をＡ，数学が好きな学生の集合をＢとする．
  - 国語あるいは数学のいずれかが好きな学生の数を示せ．

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$

$$=23+15-7=31$$

数え上げ2

- 英語が好きな学生の集合Cとし，Cの数を19人とする．数学と英語が好きな学生は6人，国語と英語が好きな学生が9人とする．数学と英語と国語が好きな学生が2人とする
- 次の集合の意味と人数を示せ．

$$\left|A \cup B \cup C\right| = 37$$

部分集合

- 集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$ に対して

　① 空でない部分集合は何個あるか？
　② 空でない真部分集合は何個あるか？
　③ 要素数が３個の部分集合を全て示せ？

　④ 要素数が偶数個の部分集合は何個あるか？
　⑤ 要素数が奇数個の部分集合は何個あるか？
　⑥ 要素1を含む部分集合は何個あるか？
　⑦ 要素1を含む奇数個からなる部分集合は何個あるか？

部分集合

- 集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$ に対して

  ①　空でない部分集合は何個あるか？　31

  ②　空でない真部分集合は何個あるか？　30

  ③　要素数が３個の部分集合を全て示せ？

  {1,2,3},{1,2,4},{1,2,5},{1,3,4},{1,3,5},{1,4,5},{2,3,4},{2,3,5},{2,4,5},{3,4,5}

  ④　要素数が偶数個の部分集合は何個あるか？　16

  ⑤　要素数が奇数個の部分集合は何個あるか？　16

  ⑥　要素1を含む部分集合は何個あるか？　16

  ⑦　要素1を含む奇数個からなる部分集合は何個あるか？　8