05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（１）P(1)は成り立つ

（２）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，

を満たすとする.

このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ.

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1) P(1)は成立

(2) n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（1）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（2）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（1） P(0)が成立
（2） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n)=1+2+\cdots+n$と定義すると
すべての自然数について
$S(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ が成立することを証明する.

$(i)\, n=1$ に対して

$(\text{左辺})=1$

$(\text{右辺})=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,$(\text{左辺})=(\text{右辺})$である.

$(ii)\, n=k$ に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$ が成立すると仮定する.

このとき, $n=k+1$ に対して,

$(\text{左辺})=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$(\text{右辺})=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= 1+2+\cdots+k+(k+1) \\
&= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) \\
&= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する.

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n>2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n>n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（１）P(1)は成り立つ

（２）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，

を満たすとする.

このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ.

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1)　P(1)は成立

(2)　n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（1）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（2）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（1） P(0)が成立
（2） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n)=1+2+\cdots+n$ と定義すると
すべての自然数について
$S(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$ である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$が成立することを証明する.

$(i)\,n=1$に対して

$(\text{左辺})=1$

$(\text{右辺})=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,(左辺)＝(右辺)である.

$(ii)\,n=k$に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$が成立すると仮定する.

このとき，$n=k+1$に対して,

$(\text{左辺})=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$(\text{右辺})=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺})&=1+2+\cdots+k+(k+1)\\
&=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\\
&=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\\
&=\frac{(k+1)(k+2)}{2}\\
&=(\text{右辺})
\end{aligned}
$$

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する.

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n > 2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n > n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（１）P(1)は成り立つ

（２）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，

を満たすとする.

このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ.

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1)　P(1)は成立

(2)　n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（１）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（２）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（１） P(0)が成立
（２） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n) = 1 + 2 + \cdots + n$と定義すると
すべての自然数について
$S(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$が成立することを証明する.

$(i)\, n=1$に対して

$(\text{左辺})=1$

$(\text{右辺})=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,$(\text{左辺})=(\text{右辺})$である.

$(ii)\, n=k$に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$が成立すると仮定する.

このとき, $n=k+1$に対して,

$(\text{左辺})=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$(\text{右辺})=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= 1+2+\cdots+k+(k+1) \\
&= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) \\
&= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する.

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n > 2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n > n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（１）P(1)は成り立つ

（２）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，

を満たすとする．

このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ．

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1)　P(1)は成立

(2)　n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（１）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（２）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（１） P(0)が成立
（２） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n) = 1 + 2 + \cdots + n$ と定義すると
すべての自然数について
$S(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ が成立することを証明する.

$(i)\, n=1$ に対して

$(\text{左辺})=1$

$(\text{右辺})=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,(左辺)＝(右辺)である.

$(ii)\, n=k$ に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$ が成立すると仮定する.

このとき, $n=k+1$ に対して,

$(\text{左辺})=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$(\text{右辺})=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= 1+2+\cdots+k+(k+1) \\
&= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) \\
&= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する.

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n > 2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n > n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（１）P(1)は成り立つ

（２）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，

を満たすとする.

このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ.

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1)　P(1)は成立

(2)　n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（１）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（２）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（１） P(0)が成立
（２） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n)=1+2+\cdots+n$ と定義すると

すべての自然数について

$S(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$ である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$が成立することを証明する.

$(i)\, n=1$に対して

(左辺)$=1$

(右辺)$=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,(左辺)=(右辺)である.

$(ii)\, n=k$に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$が成立すると仮定する.

このとき, $n=k+1$に対して,

(左辺)$=1+2+\cdots+k+(k+1)$

(右辺)$=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

(左辺)$=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$$=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

$$=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

=(右辺)

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する.

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n>2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n>n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（１）P(1)は成り立つ

（２）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，

を満たすとする.

このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ.

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1)　P(1)は成立

(2)　n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（１）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（２）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（１） P(0)が成立
（２） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

$\boxed{\text{問題}}$

$S(n)=1+2+\cdots+n$と定義すると
すべての自然数について
$S(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$が成立することを証明する.

$(i)\, n=1$に対して

(左辺)$=1$

(右辺)$=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,(左辺)=(右辺)である.

$(ii)\, n=k$に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$が成立すると仮定する.

このとき, $n=k+1$に対して,

(左辺)$=1+2+\cdots+k+(k+1)$

(右辺)$=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

(左辺)$=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$=\dfrac{k(k+1)}{2}+(k+1)$

$=\dfrac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$

$=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

=(右辺)

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する.

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n > 2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n > n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（１）P(1)は成り立つ

（２）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，

を満たすとする.

このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ.

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1) P(1)は成立

(2) n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（１）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（２）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（１） P(0)が成立
（２） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n)=1+2+\cdots+n$と定義すると
すべての自然数について
$S(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$が成立することを証明する.

$(i)n=1$に対して

$(\text{左辺})=1$

$(\text{右辺})=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,$(\text{左辺})=(\text{右辺})$である.

$(ii)n=k$に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$が成立すると仮定する.

このとき, $n=k+1$に対して,

$(\text{左辺})=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$(\text{右辺})=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺})&=1+2+\cdots+k+(k+1)\\
&=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\\
&=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\\
&=\frac{(k+1)(k+2)}{2}\\
&=(\text{右辺})
\end{aligned}
$$

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する.

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n > 2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n > n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（１）P(1)は成り立つ

（２）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，

を満たすとする.

このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ.

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1)　P(1)は成立

(2)　n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（1）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（2）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（1） P(0)が成立
（2） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n)=1+2+\cdots+n$と定義すると
すべての自然数について
$S(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$が成立することを証明する.

$(i)n=1$に対して

$(左辺)=1$

$(右辺)=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,$(左辺)=(右辺)$である.

$(ii)n=k$に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$が成立すると仮定する.

このとき, $n=k+1$に対して,

$(左辺)=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$(右辺)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$
\begin{aligned}
(左辺)&=1+2+\cdots+k+(k+1)\\
&=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\\
&=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\\
&=\frac{(k+1)(k+2)}{2}\\
&=(右辺)
\end{aligned}
$$

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する．

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n > 2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n > n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（１）P(1)は成り立つ

（２）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，

を満たすとする.

このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ.

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1) P(1)は成立

(2) n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（1）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（2）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（1） P(0)が成立
（2） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n)=1+2+\cdots+n$と定義すると
すべての自然数について
$S(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$が成立することを証明する.

$(i)\,n=1$に対して

$(\text{左辺})=1$

$(\text{右辺})=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,(左辺)=(右辺)である.

$(ii)\,n=k$に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$が成立すると仮定する.

このとき, $n=k+1$に対して,

$(\text{左辺})=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$(\text{右辺})=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= 1+2+\cdots+k+(k+1)\\
&= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\\
&= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2}\\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する.

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n>2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n>n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（１）P(1)は成り立つ

（２）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，

を満たすとする．

このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ．

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1) P(1)は成立

(2) n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（１）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（２）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（１） P(0)が成立
（２） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには最小数が存在する.

問題

$S(n)=1+2+\cdots+n$と定義すると

すべての自然数について

$S(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$が成立することを証明する.

$(i)n=1$に対して

$(左辺)=1$

$(右辺)=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,$(左辺)=(右辺)$である.

$(ii)n=k$に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$が成立すると仮定する.

このとき，$n=k+1$に対して,

$(左辺)=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$(右辺)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$
\begin{aligned}
(左辺)&=1+2+\cdots+k+(k+1)\\
&=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\\
&=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\\
&=\frac{(k+1)(k+2)}{2}\\
&=(右辺)
\end{aligned}
$$

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する.

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n>2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n>n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（１）P(1)は成り立つ

（２）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，

を満たすとする.

このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ.

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1) P(1)は成立

(2) n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（１）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（２）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（１） P(0)が成立
（２） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n) = 1 + 2 + \cdots + n$と定義すると

すべての自然数について

$S(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$が成立することを証明する.

$(i)\,n=1$に対して

$(\text{左辺})=1$

$(\text{右辺})=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,(左辺)=(右辺)である.

$(ii)\,n=k$に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$が成立すると仮定する.

このとき, $n=k+1$に対して,

$(\text{左辺})=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$(\text{右辺})=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=1+2+\cdots+k+(k+1)\\&=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\\&=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\\&=\frac{(k+1)(k+2)}{2}\\&=(\text{右辺})\end{aligned}$$

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する.

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n > 2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n > n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（１）P(1)は成り立つ

（２）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，

を満たすとする.

このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ.

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1) P(1)は成立

(2) n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（１）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（２）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（１） P(0)が成立
（２） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n)=1+2+\cdots+n$と定義すると
すべての自然数について
$S(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ が成立することを証明する.

$(i)\, n=1$ に対して

$(\text{左辺})=1$

$(\text{右辺})=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,(左辺)＝(右辺)である.

$(ii)\, n=k$ に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$ が成立すると仮定する.

このとき， $n=k+1$ に対して,

$(\text{左辺})=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$(\text{右辺})=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= 1+2+\cdots+k+(k+1) \\
&= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) \\
&= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する.

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n>2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n>n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（１）P(1)は成り立つ

（２）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，

を満たすとする．

このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ．

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1)　P(1)は成立

(2)　n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（1）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（2）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（1） P(0)が成立
（2） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n)=1+2+\cdots+n$と定義すると
すべての自然数について
$S(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$が成立することを証明する.

$(i)\,n=1$に対して

(左辺)$=1$

(右辺)$=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,(左辺)$=$(右辺)である.

$(ii)\,n=k$に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$が成立すると仮定する.

このとき，$n=k+1$に対して,

(左辺)$=1+2+\cdots+k+(k+1)$

(右辺)$=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

(左辺)$=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$$=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

$$=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$=$(右辺)

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する.

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n>2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n>n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（１）P(1)は成り立つ

（２）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，

を満たすとする.

このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ.

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1) P(1)は成立

(2) n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（1）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（2）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（1） P(0)が成立
（2） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n)=1+2+\cdots+n$ と定義すると

すべての自然数について

$S(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$ である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$が成立することを証明する.

$(i)\,n=1$に対して

$(\text{左辺})=1$

$(\text{右辺})=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,$(\text{左辺})=(\text{右辺})$である.

$(ii)\,n=k$に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$が成立すると仮定する.

このとき, $n=k+1$に対して,

$(\text{左辺})=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$(\text{右辺})=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= 1+2+\cdots+k+(k+1)\\
&= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\\
&= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2}\\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する．

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n>2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n>n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（1）P(1)は成り立つ

（2）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，
を満たすとする.
このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ.

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1) P(1)は成立

(2) n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（１）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（２）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（１） P(0)が成立
（２） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n)=1+2+\cdots+n$と定義すると
すべての自然数について
$S(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$が成立することを証明する.

$(i)n=1$に対して

$(\text{左辺})=1$

$(\text{右辺})=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,(左辺)=(右辺)である.

$(ii)n=k$に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$が成立すると仮定する.

このとき, $n=k+1$に対して,

$(\text{左辺})=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$(\text{右辺})=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺})&=1+2+\cdots+k+(k+1)\\
&=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\\
&=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\\
&=\frac{(k+1)(k+2)}{2}\\
&=(\text{右辺})
\end{aligned}
$$

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する.

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n > 2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n > n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（１）P(1)は成り立つ

（２）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，

を満たすとする.

このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ.

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1)　P(1)は成立

(2)　n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（1）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（2）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（1） P(0)が成立
（2） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n)=1+2+\cdots+n$と定義すると
すべての自然数について
$S(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$が成立することを証明する.

$(i)n=1$に対して

$(\text{左辺})=1$

$(\text{右辺})=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,$(\text{左辺})=(\text{右辺})$である.

$(ii)n=k$に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$が成立すると仮定する.

このとき, $n=k+1$に対して,

$(\text{左辺})=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$(\text{右辺})=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺})&=1+2+\cdots+k+(k+1)\\
&=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\\
&=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\\
&=\frac{(k+1)(k+2)}{2}\\
&=(\text{右辺})
\end{aligned}
$$

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する.

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n>2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n>n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（１）P(1)は成り立つ

（２）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，

を満たすとする.

このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ.

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1)　P(1)は成立

(2)　n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（1）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（2）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（1） P(0)が成立
（2） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n)=1+2+\cdots+n$と定義すると
すべての自然数について
$S(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$が成立することを証明する.

$(i)\, n=1$に対して

$(\text{左辺})=1$

$(\text{右辺})=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,$(\text{左辺})=(\text{右辺})$である.

$(ii)\, n=k$に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$が成立すると仮定する.

このとき, $n=k+1$に対して,

$(\text{左辺})=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$(\text{右辺})=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= 1+2+\cdots+k+(k+1) \\
&= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) \\
&= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する.

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n > 2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n > n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（１）P(1)は成り立つ

（２）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ,
を満たすとする.
このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ.

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1)　P(1)は成立

(2)　n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（1）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（2）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（1） P(0)が成立
（2） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n)=1+2+\cdots+n$ と定義すると
すべての自然数について
$S(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$ である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$が成立することを証明する.

$(i)\,n=1$に対して

(左辺)$=1$

(右辺)$=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,(左辺)$=$(右辺)である.

$(ii)\,n=k$に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$が成立すると仮定する.

このとき, $n=k+1$に対して,

(左辺)$=1+2+\cdots+k+(k+1)$

(右辺)$=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

(左辺)$=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$$=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

$$=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$=$(右辺)

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する．

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n > 2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n > n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（１）P(1)は成り立つ

（２）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，

を満たすとする．

このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ．

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1)　P(1)は成立

(2)　n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（１）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（２）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（１） P(0)が成立
（２） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n) = 1 + 2 + \cdots + n$と定義すると

すべての自然数について

$S(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$が成立することを証明する.

$(i)n=1$に対して

(左辺)$=1$

(右辺)$=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,(左辺)=(右辺)である.

$(ii)n=k$に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$が成立すると仮定する.

このとき, $n=k+1$に対して,

(左辺)$=1+2+\cdots+k+(k+1)$

(右辺)$=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

(左辺)$=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$$=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

$$=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

=(右辺)

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する.

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n > 2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n > n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（１）P(1)は成り立つ

（２）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，

を満たすとする.

このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ.

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1)　P(1)は成立

(2)　n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（１）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（２）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（１） P(0)が成立
（２） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n)=1+2+\cdots+n$と定義すると
すべての自然数について
$S(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$が成立することを証明する.

$(i)\,n=1$に対して

$(左辺)=1$

$(右辺)=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,(左辺)$=$(右辺)である.

$(ii)\,n=k$に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$が成立すると仮定する.

このとき, $n=k+1$に対して,

$(左辺)=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$(右辺)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$
\begin{aligned}
(左辺)&=1+2+\cdots+k+(k+1)\\
&=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\\
&=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\\
&=\frac{(k+1)(k+2)}{2}\\
&=(右辺)
\end{aligned}
$$

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する．

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n>2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n>n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（１）P(1)は成り立つ

（２）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，

を満たすとする.

このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ.

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1) P(1)は成立

(2) n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（1）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（2）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（1） P(0)が成立
（2） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n)=1+2+\cdots+n$と定義すると
すべての自然数について
$S(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ が成立することを証明する.

$(i)\, n=1$ に対して

$(\text{左辺})=1$

$(\text{右辺})=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,(左辺) = (右辺)である.

$(ii)\, n=k$ に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$ が成立すると仮定する.

このとき, $n=k+1$ に対して,

$(\text{左辺})=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$(\text{右辺})=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= 1+2+\cdots+k+(k+1) \\
&= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) \\
&= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する.

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n > 2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n > n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（1）P(1)は成り立つ

（2）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，

を満たすとする.

このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ.

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1)　P(1)は成立

(2)　n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（１）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（２）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（１） P(0)が成立
（２） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n)=1+2+\cdots+n$と定義すると
すべての自然数について
$S(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ が成立することを証明する.

$(i)\, n=1$ に対して

$(\text{左辺})=1$

$(\text{右辺})=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,(左辺) = (右辺)である.

$(ii)\, n=k$ に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$ が成立すると仮定する.

このとき, $n=k+1$ に対して,

$(\text{左辺})=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$(\text{右辺})=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= 1+2+\cdots+k+(k+1) \\
&= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) \\
&= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する.

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n>2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n>n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が2つの条件

（1）P(1)は成り立つ

（2）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，

を満たすとする.

このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ.

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1)　P(1)は成立

(2)　n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（１）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（２）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（１） P(0)が成立
（２） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n)=1+2+\cdots+n$と定義すると
すべての自然数について
$S(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$が成立することを証明する.

$(i)\ n=1$に対して

(左辺)$=1$

(右辺)$=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,(左辺)=(右辺)である.

$(ii)\ n=k$に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$が成立すると仮定する.

このとき, $n=k+1$に対して,

(左辺)$=1+2+\cdots+k+(k+1)$

(右辺)$=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

(左辺)$=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$$=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

$$=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$=$(右辺)

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する.

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n>2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n>n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（１）P(1)は成り立つ

（２）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，

を満たすとする．

このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ．

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1) P(1)は成立

(2) n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（１）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（２）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（１） P(0)が成立
（２） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n) = 1 + 2 + \cdots + n$ と定義すると

すべての自然数について

$S(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ が成立することを証明する.

$(i)\, n=1$ に対して

$(\text{左辺})=1$

$(\text{右辺})=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,$(\text{左辺})=(\text{右辺})$ である.

$(ii)\, n=k$ に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$ が成立すると仮定する.

このとき, $n=k+1$ に対して,

$(\text{左辺})=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$(\text{右辺})=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= 1+2+\cdots+k+(k+1)\\
&= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\\
&= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2}\\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する.

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n>2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n>n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（１）P(1)は成り立つ

（２）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，
を満たすとする.
このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ.

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1)　P(1)は成立

(2)　n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（1）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（2）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（1） P(0)が成立
（2） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n)=1+2+\cdots+n$と定義すると
すべての自然数について
$S(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ が成立することを証明する.

$(i)\, n=1$ に対して

$(左辺)=1$

$(右辺)=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,(左辺) = (右辺)である.

$(ii)\, n=k$ に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$ が成立すると仮定する.

このとき, $n=k+1$ に対して,

$(左辺)=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$(右辺)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$
\begin{aligned}
(左辺) &= 1+2+\cdots+k+(k+1) \\
&= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) \\
&= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\
&= (右辺)
\end{aligned}
$$

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する.

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n>2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n>n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（１）P(1)は成り立つ

（２）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，

を満たすとする.

このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ.

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1)　P(1)は成立

(2)　n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（1）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（2）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（1） P(0)が成立
（2） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n)=1+2+\cdots+n$と定義すると
すべての自然数について
$S(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$が成立することを証明する.

$(i)\,n=1$に対して

$(左辺)=1$

$(右辺)=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,$(左辺)=(右辺)$である.

$(ii)\,n=k$に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$が成立すると仮定する.

このとき, $n=k+1$に対して,

$(左辺)=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$(右辺)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$
\begin{aligned}
(左辺)&=1+2+\cdots+k+(k+1)\\
&=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\\
&=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\\
&=\frac{(k+1)(k+2)}{2}\\
&=(右辺)
\end{aligned}
$$

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する.

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n > 2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n > n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（１）P(1)は成り立つ

（２）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，

を満たすとする.

このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ.

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1)　P(1)は成立

(2)　n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（1）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（2）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（1） P(0)が成立
（2） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n)=1+2+\cdots+n$ と定義すると
すべての自然数について
$S(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$ である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ が成立することを証明する．

$(i)\, n=1$ に対して

$(左辺)=1$

$(右辺)=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって，$(左辺)=(右辺)$ である．

$(ii)\, n=k$ に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$ が成立すると仮定する．

このとき，$n=k+1$ に対して，

$(左辺)=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$(右辺)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$
\begin{aligned}
(左辺) &= 1+2+\cdots+k+(k+1) \\
&= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) \\
&= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\
&= (右辺)
\end{aligned}
$$

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する.

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n>2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n>n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（１）P(1)は成り立つ

（２）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，

を満たすとする.

このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ.

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1)　P(1)は成立

(2)　n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（1）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（2）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（1） P(0)が成立
（2） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n)=1+2+\cdots+n$と定義すると
すべての自然数について
$S(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$が成立することを証明する.

$(i)\,n=1$に対して

(左辺)$=1$

(右辺)$=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,(左辺)=(右辺)である.

$(ii)\,n=k$に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$が成立すると仮定する.

このとき, $n=k+1$に対して,

(左辺)$=1+2+\cdots+k+(k+1)$

(右辺)$=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

(左辺)$=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$=\dfrac{k(k+1)}{2}+(k+1)$

$=\dfrac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$

$=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

=(右辺)

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する.

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n>2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n>n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（１）P(1)は成り立つ

（２）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，
を満たすとする.
このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ.

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1)　P(1)は成立

(2)　n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（1）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（2）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（1） P(0)が成立
（2） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n)=1+2+\cdots+n$と定義すると
すべての自然数について
$S(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$が成立することを証明する.

$(i)\,n=1$に対して

(左辺)$=1$

(右辺)$=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,(左辺)=(右辺)である.

$(ii)\,n=k$に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$が成立すると仮定する.

このとき, $n=k+1$に対して,

(左辺)$=1+2+\cdots+k+(k+1)$

(右辺)$=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

(左辺)$=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$$=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

$$=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

=(右辺)

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する.

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n > 2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n > n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（１）P(1)は成り立つ

（２）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，

を満たすとする.

このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ.

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1) P(1)は成立

(2) n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（1）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（2）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（1） P(0)が成立
（2） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n)=1+2+\cdots+n$と定義すると
すべての自然数について
$S(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$が成立することを証明する.

$(i)\, n=1$に対して

$(\text{左辺})=1$

$(\text{右辺})=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,(左辺)=(右辺)である.

$(ii)\, n=k$に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$が成立すると仮定する.

このとき, $n=k+1$に対して,

$(\text{左辺})=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$(\text{右辺})=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= 1+2+\cdots+k+(k+1) \\
&= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) \\
&= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する.

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n > 2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n > n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（１）P(1)は成り立つ

（２）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，

を満たすとする.

このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ.

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1)　P(1)は成立

(2)　n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（１）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（２）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（１） P(0)が成立
（２） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n)=1+2+\cdots+n$ と定義すると
すべての自然数について
$S(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$ である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$が成立することを証明する.

$(i)\,n=1$に対して

$(\text{左辺})=1$

$(\text{右辺})=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,(左辺)＝(右辺)である.

$(ii)\,n=k$に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$が成立すると仮定する.

このとき，$n=k+1$に対して,

$(\text{左辺})=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$(\text{右辺})=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= 1+2+\cdots+k+(k+1)\\
&= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\\
&= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2}\\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する．

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n>2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n>n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（１）P(1)は成り立つ

（２）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，

を満たすとする.

このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ.

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1)　P(1)は成立

(2)　n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（1）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（2）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（1） P(0)が成立
（2） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n) = 1 + 2 + \cdots + n$ と定義すると

すべての自然数について

$$S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$ である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$が成立することを証明する.

$(i)\,n=1$に対して

(左辺)$=1$

(右辺)$=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,(左辺)=(右辺)である.

$(ii)\,n=k$に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$が成立すると仮定する.

このとき, $n=k+1$に対して,

(左辺)$=1+2+\cdots+k+(k+1)$

(右辺)$=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

(左辺)$=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$$=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

$$=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$=$(右辺)

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する.

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n > 2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n > n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（1）P(1)は成り立つ

（2）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，

を満たすとする.

このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ.

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1)　P(1)は成立

(2)　n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（1）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（2）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（1） P(0)が成立
（2） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n)=1+2+\cdots+n$ と定義すると
すべての自然数について
$S(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$ である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$が成立することを証明する.

$(i)\,n=1$に対して

$(\text{左辺})=1$

$(\text{右辺})=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,$(\text{左辺})=(\text{右辺})$である.

$(ii)\,n=k$に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$が成立すると仮定する.

このとき, $n=k+1$に対して,

$(\text{左辺})=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$(\text{右辺})=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= 1+2+\cdots+k+(k+1)\\
&= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\\
&= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2}\\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する.

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n > 2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n > n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（１）P(1)は成り立つ

（２）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，

を満たすとする．

このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ．

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1)　P(1)は成立

(2)　n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（１）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（２）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（１） P(0)が成立
（２） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n) = 1 + 2 + \cdots + n$ と定義すると

すべての自然数について

$S(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$が成立することを証明する.

$(i)\,n=1$に対して

$(\text{左辺})=1$

$(\text{右辺})=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,(左辺)＝(右辺)である.

$(ii)\,n=k$に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$が成立すると仮定する.

このとき, $n=k+1$に対して,

$(\text{左辺})=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$(\text{右辺})=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= 1+2+\cdots+k+(k+1) \\
&= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) \\
&= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する.

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n > 2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n > n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（１）P(1)は成り立つ

（２）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，

を満たすとする.

このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ.

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1)　P(1)は成立

(2)　n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（１）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（２）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（１） P(0)が成立
（２） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n)=1+2+\cdots+n$と定義すると
すべての自然数について
$S(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ が成立することを証明する.

$(i)\, n=1$ に対して

$(左辺)=1$

$(右辺)=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,$(左辺)=(右辺)$ である.

$(ii)\, n=k$ に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$ が成立すると仮定する.

このとき, $n=k+1$ に対して,

$(左辺)=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$(右辺)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$
\begin{aligned}
(左辺) &= 1+2+\cdots+k+(k+1) \\
&= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) \\
&= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\
&= (右辺)
\end{aligned}
$$

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する.

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n>2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n>n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（1）P(1)は成り立つ

（2）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，

を満たすとする.

このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ.

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1)　P(1)は成立

(2)　n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（1）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（2）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（1） P(0)が成立
（2） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n) = 1 + 2 + \cdots + n$と定義すると
すべての自然数について
$S(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$が成立することを証明する.

$(i)\,n=1$に対して

$(\text{左辺})=1$

$(\text{右辺})=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,(左辺)＝(右辺)である.

$(ii)\,n=k$に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$が成立すると仮定する.

このとき，$n=k+1$に対して,

$(\text{左辺})=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$(\text{右辺})=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= 1+2+\cdots+k+(k+1) \\
&= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) \\
&= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する．

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n>2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n>n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（１）P(1)は成り立つ

（２）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，

を満たすとする.

このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ.

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1) P(1)は成立

(2) n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（1）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（2）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（1） P(0)が成立
（2） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n)=1+2+\cdots+n$と定義すると
すべての自然数について

$$S(n)=\frac{n(n+1)}{2}$$

である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$が成立することを証明する.

$(i)n=1$に対して

$(\text{左辺})=1$

$(\text{右辺})=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,$(\text{左辺})=(\text{右辺})$である.

$(ii)n=k$に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$が成立すると仮定する.

このとき, $n=k+1$に対して,

$(\text{左辺})=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$(\text{右辺})=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= 1+2+\cdots+k+(k+1) \\
&= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) \\
&= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する.

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n>2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n>n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（1）P(1)は成り立つ

（2）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，

を満たすとする.

このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ.

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1)　P(1)は成立

(2)　n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（１）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（２）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（１） P(0)が成立
（２） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n)=1+2+\cdots+n$と定義すると
すべての自然数について
$S(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$が成立することを証明する.

$(i)\,n=1$に対して

$(左辺)=1$

$(右辺)=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,(左辺)$=$(右辺)である.

$(ii)\,n=k$に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$が成立すると仮定する.

このとき, $n=k+1$に対して,

$(左辺)=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$(右辺)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$
\begin{aligned}
(左辺) &= 1+2+\cdots+k+(k+1) \\
&= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) \\
&= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\
&= (右辺)
\end{aligned}
$$

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する．

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n>2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n>n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（１）P(1)は成り立つ

（２）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，

を満たすとする.

このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ.

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1) P(1)は成立

(2) n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（1）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（2）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（1） P(0)が成立
（2） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n) = 1 + 2 + \cdots + n$ と定義すると

すべての自然数について

$S(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$が成立することを証明する.

$(i)\,n=1$に対して

(左辺)$=1$

(右辺)$=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,(左辺)=(右辺)である.

$(ii)\,n=k$に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$が成立すると仮定する.

このとき, $n=k+1$に対して,

(左辺)$=1+2+\cdots+k+(k+1)$

(右辺)$=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

(左辺)$=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$=\dfrac{k(k+1)}{2}+(k+1)$

$=\dfrac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$

$=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

=(右辺)

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する.

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n>2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n>n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（1）P(1)は成り立つ

（2）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，
を満たすとする.
このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ.

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1) P(1)は成立

(2) n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（1）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（2）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（1） P(0)が成立
（2） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n)=1+2+\cdots+n$と定義すると

すべての自然数について

$S(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$が成立することを証明する.

$(i)n=1$に対して

$(左辺)=1$

$(右辺)=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,$(左辺)=(右辺)$である.

$(ii)n=k$に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$が成立すると仮定する.

このとき, $n=k+1$に対して,

$(左辺)=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$(右辺)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$
\begin{aligned}
(左辺)&=1+2+\cdots+k+(k+1)\\
&=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\\
&=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\\
&=\frac{(k+1)(k+2)}{2}\\
&=(右辺)
\end{aligned}
$$

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する．

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n>2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n>n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（１）P(1)は成り立つ

（２）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，

を満たすとする.

このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ.

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1)　P(1)は成立

(2)　n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（1）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（2）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（1） P(0)が成立
（2） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n)=1+2+\cdots+n$と定義すると
すべての自然数について
$S(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$が成立することを証明する.

$(i)\,n=1$に対して

$(\text{左辺})=1$

$(\text{右辺})=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,(左辺)$=$(右辺)である.

$(ii)\,n=k$に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$が成立すると仮定する.

このとき, $n=k+1$に対して,

$(\text{左辺})=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$(\text{右辺})=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= 1+2+\cdots+k+(k+1)\\
&= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\\
&= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2}\\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する．

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n > 2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n > n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（１）P(1)は成り立つ

（２）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，

を満たすとする.

このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ.

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1)　P(1)は成立

(2)　n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（1）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（2）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（1） P(0)が成立
（2） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n)=1+2+\cdots+n$ と定義すると
すべての自然数について
$S(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$ である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ が成立することを証明する.

$(i)\, n=1$ に対して

(左辺) $=1$

(右辺) $=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,(左辺) = (右辺)である.

$(ii)\, n=k$ に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$ が成立すると仮定する.

このとき, $n=k+1$ に対して,

(左辺) $=1+2+\cdots+k+(k+1)$

(右辺) $=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

(左辺) $=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$=\dfrac{k(k+1)}{2}+(k+1)$

$=\dfrac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$

$=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$=$ (右辺)

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する．

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n > 2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n > n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（１）P(1)は成り立つ

（２）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，
を満たすとする.
このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ.

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1)　P(1)は成立

(2)　n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（1）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（2）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（1） P(0)が成立
（2） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには最小数が存在する.

問題

$S(n) = 1 + 2 + \cdots + n$と定義すると

すべての自然数について

$S(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ が成立することを証明する.

$(i)\,n=1$ に対して

$(\text{左辺})=1$

$(\text{右辺})=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,$(\text{左辺})=(\text{右辺})$ である.

$(ii)\,n=k$ に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$ が成立すると仮定する.

このとき, $n=k+1$ に対して,

$(\text{左辺})=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$(\text{右辺})=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= 1+2+\cdots+k+(k+1)\\
&= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\\
&= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2}\\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する.

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n > 2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n > n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（１）P(1)は成り立つ

（２）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，

を満たすとする.

このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ.

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1) P(1)は成立

(2) n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（１）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（２）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（１） P(0)が成立
（２） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n) = 1 + 2 + \cdots + n$と定義すると
すべての自然数について
$S(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ が成立することを証明する．

$(i)\, n=1$ に対して

$(\text{左辺})=1$

$(\text{右辺})=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって，$(\text{左辺})=(\text{右辺})$ である．

$(ii)\, n=k$ に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$ が成立すると仮定する．

このとき， $n=k+1$ に対して，

$(\text{左辺})=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$(\text{右辺})=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= 1+2+\cdots+k+(k+1) \\
&= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) \\
&= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する.

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n > 2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n > n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（1）P(1)は成り立つ

（2）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，

を満たすとする.

このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ.

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1) P(1)は成立

(2) n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（1）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（2）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（1） P(0)が成立
（2） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n) = 1 + 2 + \cdots + n$と定義すると

すべての自然数について

$S(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$が成立することを証明する.

$(i)\,n=1$に対して

$(\text{左辺})=1$

$(\text{右辺})=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,$(\text{左辺})=(\text{右辺})$である.

$(ii)\,n=k$に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$が成立すると仮定する.

このとき, $n=k+1$に対して,

$(\text{左辺})=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$(\text{右辺})=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= 1+2+\cdots+k+(k+1) \\
&= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) \\
&= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する.

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n > 2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n > n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（１）P(1)は成り立つ

（２）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，

を満たすとする.

このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ.

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1)　P(1)は成立

(2)　n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（1）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（2）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（1） P(0)が成立
（2） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n) = 1 + 2 + \cdots + n$と定義すると
すべての自然数について
$S(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$が成立することを証明する.

$(i)\,n=1$に対して

$(\text{左辺})=1$

$(\text{右辺})=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,(左辺)=(右辺)である.

$(ii)\,n=k$に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$が成立すると仮定する.

このとき, $n=k+1$に対して,

$(\text{左辺})=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$(\text{右辺})=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= 1+2+\cdots+k+(k+1) \\
&= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) \\
&= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する.

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n>2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n>n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（１）P(1)は成り立つ

（２）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，

を満たすとする.

このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ.

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1)　P(1)は成立

(2)　n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（1）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（2）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（1） P(0)が成立
（2） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n)=1+2+\cdots+n$と定義すると

すべての自然数について

$S(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$が成立することを証明する.

$(i)\, n=1$に対して

(左辺)$=1$

(右辺)$=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,(左辺)=(右辺)である.

$(ii)\, n=k$に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$が成立すると仮定する.

このとき，$n=k+1$に対して,

(左辺)$=1+2+\cdots+k+(k+1)$

(右辺)$=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

(左辺)$=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$=\dfrac{k(k+1)}{2}+(k+1)$

$=\dfrac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$

$=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$=$(右辺)

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する.

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
  $$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
  $$2^n > 2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
  次の不等式が成立
  $$2^n > n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（１）P(1)は成り立つ

（２）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，

を満たすとする.

このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ.

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1)　P(1)は成立

(2)　n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（1）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（2）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（1） P(0)が成立
（2） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n)=1+2+\cdots+n$と定義すると
すべての自然数について
$S(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$が成立することを証明する.

$(i)\,n=1$に対して

(左辺)$=1$

(右辺)$=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,(左辺)=(右辺)である.

$(ii)\,n=k$に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$が成立すると仮定する.

このとき, $n=k+1$に対して,

(左辺)$=1+2+\cdots+k+(k+1)$

(右辺)$=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

(左辺)$=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$$=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

$$=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

=(右辺)

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する.

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n>2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n>n^2$$

05．数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（１）P(1)は成り立つ

（２）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，

を満たすとする.

このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ.

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1)　P(1)は成立

(2)　n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（１）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（２）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（１） P(0)が成立
（２） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n)=1+2+\cdots+n$と定義すると
すべての自然数について
$S(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ が成立することを証明する.

$(i)\ n=1$ に対して

$(\text{左辺})=1$

$(\text{右辺})=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,(左辺)＝(右辺)である.

$(ii)\ n=k$ に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$ が成立すると仮定する.

このとき, $n=k+1$ に対して,

$(\text{左辺})=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$(\text{右辺})=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= 1+2+\cdots+k+(k+1)\\
&= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\\
&= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2}\\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する.

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n>2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n>n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（１）P(1)は成り立つ

（２）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，

を満たすとする．

このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ．

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1) P(1)は成立

(2) n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（1）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（2）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（1） P(0)が成立
（2） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n)=1+2+\cdots+n$と定義すると
すべての自然数について
$S(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$が成立することを証明する.

$(i)\,n=1$に対して

$(\text{左辺})=1$

$(\text{右辺})=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,$(\text{左辺})=(\text{右辺})$である.

$(ii)\,n=k$に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$が成立すると仮定する.

このとき，$n=k+1$に対して,

$(\text{左辺})=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$(\text{右辺})=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺})&=1+2+\cdots+k+(k+1)\\
&=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\\
&=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\\
&=\frac{(k+1)(k+2)}{2}\\
&=(\text{右辺})
\end{aligned}
$$

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する.

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n>2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n>n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（１）P(1)は成り立つ

（２）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，

を満たすとする.

このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ.

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1)　P(1)は成立

(2)　n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（1）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（2）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（1） P(0)が成立
（2） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n)=1+2+\cdots+n$と定義すると
すべての自然数について
$S(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$が成立することを証明する.

$(i)n=1$に対して

$(\text{左辺})=1$

$(\text{右辺})=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,$(\text{左辺})=(\text{右辺})$である.

$(ii)n=k$に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$が成立すると仮定する.

このとき, $n=k+1$に対して,

$(\text{左辺})=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$(\text{右辺})=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺})&=1+2+\cdots+k+(k+1)\\
&=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\\
&=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\\
&=\frac{(k+1)(k+2)}{2}\\
&=(\text{右辺})
\end{aligned}
$$

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する.

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n > 2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n > n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（１）P(1)は成り立つ

（２）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ,

を満たすとする.

このとき, すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ.

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1)　P(1)は成立

(2)　n=1,2,･･･,kのとき, P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（1）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（2）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（1） P(0)が成立
（2） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n)=1+2+\cdots+n$ と定義すると
すべての自然数について
$S(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$ である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ が成立することを証明する.

$(i)\, n=1$ に対して

$(\text{左辺})=1$

$(\text{右辺})=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,(左辺) = (右辺)である.

$(ii)\, n=k$ に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$ が成立すると仮定する.

このとき, $n=k+1$ に対して,

$(\text{左辺})=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$(\text{右辺})=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= 1+2+\cdots+k+(k+1)\\
&= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\\
&= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2}\\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する.

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n > 2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n > n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（1）P(1)は成り立つ

（2）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，

を満たすとする.

このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ.

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1)　P(1)は成立

(2)　n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（1）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（2）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（1） P(0)が成立
（2） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n)=1+2+\cdots+n$と定義すると
すべての自然数について
$S(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$が成立することを証明する.

$(i)\,n=1$に対して

$(\text{左辺})=1$

$(\text{右辺})=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,(左辺)＝(右辺)である.

$(ii)\,n=k$に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$が成立すると仮定する.

このとき, $n=k+1$に対して,

$(\text{左辺})=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$(\text{右辺})=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= 1+2+\cdots+k+(k+1)\\
&= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\\
&= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2}\\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する.

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n>2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n>n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（１）P(1)は成り立つ

（２）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ，

を満たすとする.

このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ.

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1)　P(1)は成立

(2)　n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（1）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（2）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（1） P(0)が成立
（2） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n)=1+2+\cdots+n$ と定義すると
すべての自然数について
$S(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$ である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$が成立することを証明する.

$(i)n=1$に対して

$(左辺)=1$

$(右辺)=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,(左辺)=(右辺)である.

$(ii)n=k$に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$が成立すると仮定する.

このとき, $n=k+1$に対して,

$(左辺)=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$(右辺)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$
\begin{aligned}
(左辺)&=1+2+\cdots+k+(k+1)\\
&=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\\
&=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\\
&=\frac{(k+1)(k+2)}{2}\\
&=(右辺)
\end{aligned}
$$

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する．

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n>2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n>n^2$$

05. 数学的帰納法

代数1

数学的帰納法

第1形式

自然数nに関する命題P(n)が２つの条件

（１）P(1)は成り立つ

（２）P(k)が成り立つならばP(k+1)も成り立つ,

を満たすとする.

このとき，すべての自然数nにたいしてP（n)は成り立つ.

第2形式

自然数に関する命題P(n)

(1)　P(1)は成立

(2)　n=1,2,･･･,kのとき，P(n)が成立するならばn=k+1のときもP(n)が成立

このときすべての自然数nに対してP(n)は成立

数学的帰納法の変型

整数nに関する命題P(n)
（1）ある一つの整数mについてP(m)が成立
（2）P(k)が成立するならばP(k+1)も成立
このとき，ｍ以上のすべての整数nに対してP(n)は成立する.

整数nに関する命題P(n)
（1） P(0)が成立
（2） P(k)が成立するならば，P(k±1)も成立
（符号に注意）
このとき，すべての整数nに対してP(n)は成立

自然数の整列性

自然数の，空でない任意の集合Aには
最小数が存在する.

問題

$S(n)=1+2+\cdots+n$と定義すると
すべての自然数について
$S(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$である

回答例

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$が成立することを証明する.

$(i)\, n=1$に対して

$(\text{左辺})=1$

$(\text{右辺})=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

したがって,(左辺)＝(右辺)である.

$(ii)\, n=k$に対して

$1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$が成立すると仮定する.

このとき，$n=k+1$に対して,

$(\text{左辺})=1+2+\cdots+k+(k+1)$

$(\text{右辺})=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= 1+2+\cdots+k+(k+1)\\
&= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\\
&= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2}\\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

(証明終わり)

背理法

- 命題を証明するために，命題の否定を仮定すると矛盾が生ずることを利用する.

例題 「素数は無限個存在する」を証明する

素数は有限個と仮定する

↓

矛盾を示す

仮定が間違っているので，有限個ではない

例題

- nが正の整数のとき，次の等式が成り立つ
$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$
- nが3以上の整数のとき，次の不等式が成立
$$2^n > 2n$$
- nが4よりも大きい自然数のとき，
次の不等式が成立
$$2^n > n^2$$