０９．群の構造を持つ集合
13回と14回にも続く

代数１

群

・空でない集合Gに対して，ある演算＊が定義

（１）閉鎖律

（２）結合律　$(x*y)*z=x*(y*z)$

（３）単位元 e の存在　$e*x=x*e=x$

（４）逆元 x' の存在　$x'*x=x*x'=e$

（５）可換律　$x*y=y*x$

可換群

位数n　$|G|=n$

正3角形の合同変換(シンメトリー)

$r_0 = 1 =$ 中心0で0度回転

$r_1 =$ 中心0で120度回転

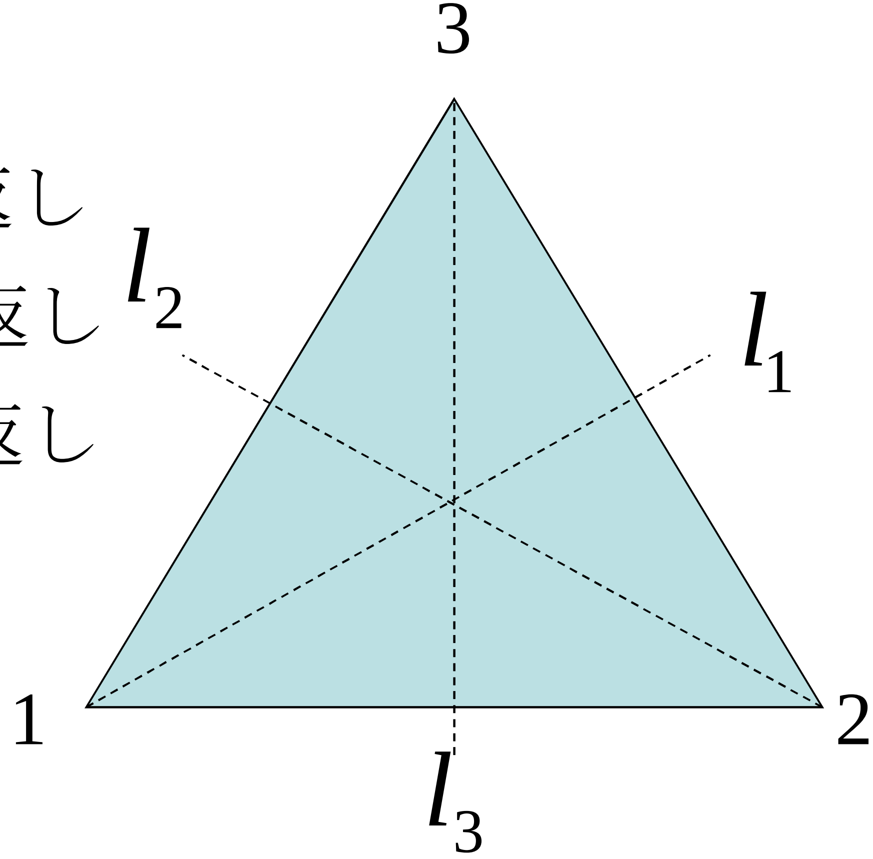
$r_2 =$ 中心0で240度回転

$s_1 =$ 直線l_1に関する折り返し

$s_2 =$ 直線l_2に関する折り返し

$s_3 =$ 直線l_3に関する折り返し

3次の2面体群



対称群

Xを集合とする．XからX自身への全単射をX上の置換という．
X上の置換全体$S(X)$は写像の合成を積として群をなす．
$S(X)$をX上の対称群という．対称群の部分群を置換群という．

３次の対称群の例

自然数1,2,3からなる集合をN_3として（$\mathrm{N}_3=\{1,2,3\}$），
N_3からN_3への全単射全体の集合をS_3とする．
S_3は写像の積（合成）に関して群となる．

$$r_0=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}, r_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}, r_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$$

$$s_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}, s_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}, s_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$$

非可換な群である

$$r_2\cdot s_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=s_2$$

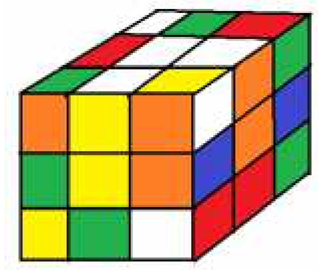
群となる例

- 可換群(アーベル群)
- 有限群／無限群
- ラテン方陣
- 加法群／乗法群
- 巡回群
- ハミルトンの4元数
- ルービックキューブ群

$$a + bi + cj + dk$$

$$\boxed{i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1}$$

ルービックキューブ群



- 6面体に9つの小面を持つ
  ただし，中心の6小面は動かない
- 2面を持つパーツは12個
  - 位置は12！通り，向きは2^{12}通り
- 3面を持つパーツは8個
  - 位置は8！通り，向きは3^{8}通り

$$12! \times 2^{12} \times 8! \times 3^{8} = 519024039293878272000\text{通り}$$

- ただし，回転で得られるのはこれの1/12

1の原始n乗根

・一般に、1のn乗根の一つをω（オメガ）とするとき、すべての1のn乗根が

$$1,\ \omega,\ \omega^2,\ \omega^3,\ \cdots,\ \omega^{n-1}$$

の形で表わされるならば、ωを1の原始n乗根という

１のn乗根

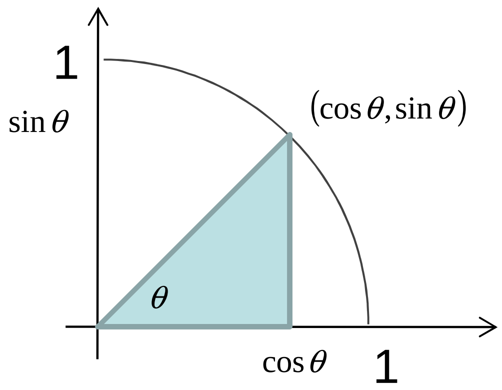
1のn乗根は単位円$|z|=1$に内接する

正n角形（中心角$2\pi/n$）のn個の頂点

$$\left\{1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{n-1}\right\} (\omega^n = 1)$$

$$\omega^k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \qquad (k = 0,1,2,\cdots,n-1)$$

複素平面で考える

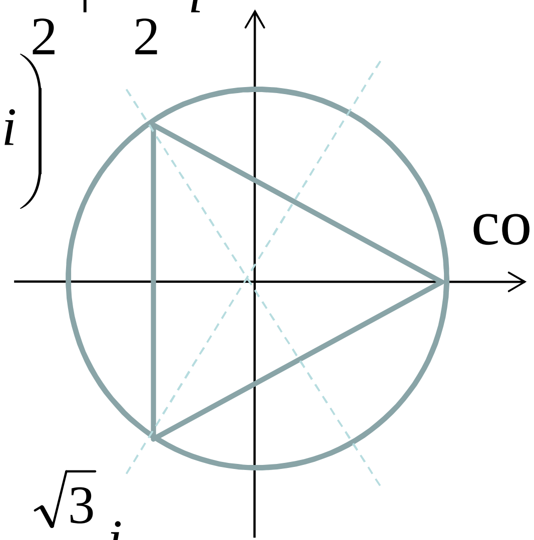


$$\cos\theta + i\sin\theta$$

1の3乗根

$$\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$



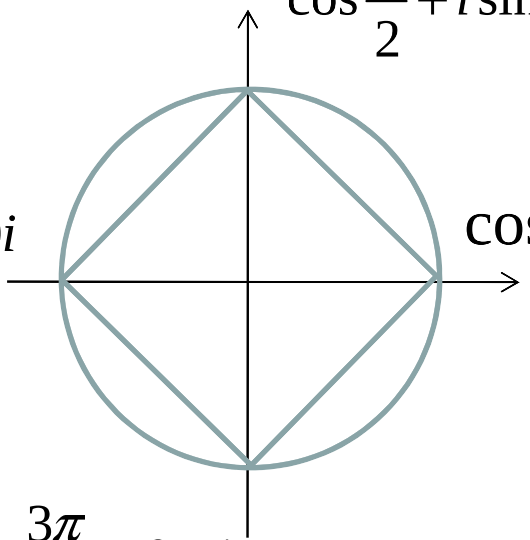
$$\cos 0+i\sin 0=1+0i$$

$$(1,0)$$

$$\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

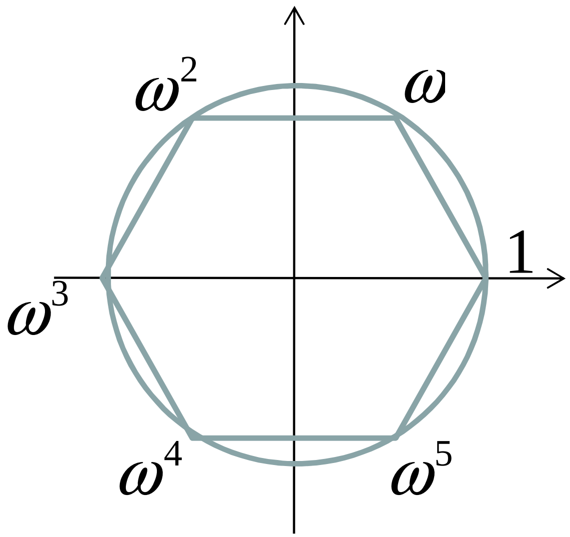
$$\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

1の4乗根



$\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=0+i$
$\cos\pi+i\sin\pi=-1+0i$
$\cos 0+i\sin 0=1+0i$
$\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=0-i$

１のn乗根



１のn乗根の集合

$$\{1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{n-1}\}\ (\omega^n = 1)$$

位数nの巡回群