

## 11. 群表

# 代数 1

# 群

・ 空でない集合Gに対して, ある演算\*が定義

(1)閉鎖律

(2)結合律

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

(3)単位元  $e$  の存在

$$e * x = x * e = x$$

(4)逆元  $x'$  の存在

$$x' * x = x * x' = e$$

---

(5)可換律

$$x * y = y * x$$

可換群

# 位数

- 群Gの元(要素)の個数n

位数n

$$|G| = n$$

- 有限群・・・有限位数の群
- 無限群・・・

# 群表 → ラテン方阵

- 群表においては、表の各行と各列にその群のすべての元が漏れなく重複無く丁度1回ずつ現れる。

$$S = \{e, a, b, c, d\}$$

	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>e</i>	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>a</i>	<i>a</i>	<i>e</i>	<i>d</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>b</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>e</i>	<i>d</i>	<i>a</i>
<i>c</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>e</i>	<i>b</i>
<i>d</i>	<i>d</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>e</i>

# 同型

- ・ 演算の記号の違いを除けば完全に等しい構造を持つとき, 同型

$$G \cong G'$$

- ・ 位数1,2,3の群は同型を除くと次の場合のみ

$$n = 1$$

	$e$
$e$	$e$

$$n = 2$$

	$e$	$a$
$e$	$e$	$a$
$a$	$a$	$e$

$$n = 3$$

	$e$	$a$	$b$
$e$	$e$	$a$	$b$
$a$	$a$	$b$	$e$
$b$	$b$	$e$	$a$

# クラインの4元数

- どの元もその元自身を逆元とし, 異なる二つの積は残りの元となる.

$$a^2 = b^2 = c^2 = e$$

$$ab = c, \quad bc = a, \quad ca = b$$

	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>e</i>	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>a</i>	<i>a</i>	<i>e</i>	<i>c</i>	<i>b</i>
<i>b</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>e</i>	<i>a</i>
<i>c</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>e</i>

# 群と魔方陣

- $n \times n$ のマス目に1から $n^2$ までの数をいれ, 各行各列の合計が  $n$  となるように並べたもの


# ラテン方陣

- ・ 各行, 各列で重複せずにある属性が並ぶもの

a	b	c
b	c	a
c	a	b

左巡回ラテン方陣

a	b	c
c	a	b
b	c	a

右巡回ラテン方陣



# グレコ・ラテン方陣(オイラー方陣)

同じ組み合わせの存在しない方陣

<b>a</b>	<b>b</b>	<b>c</b>		<b>α</b>	<b>β</b>	<b>γ</b>		<i>a<sub>α</sub></i>	<i>b<sub>β</sub></i>	<i>c<sub>γ</sub></i>
<b>b</b>	<b>c</b>	<b>a</b>	+	<b>γ</b>	<b>α</b>	<b>β</b>	=	<i>b<sub>γ</sub></i>	<i>c<sub>α</sub></i>	<i>a<sub>β</sub></i>
<b>c</b>	<b>a</b>	<b>b</b>		<b>β</b>	<b>γ</b>	<b>α</b>		<i>c<sub>β</sub></i>	<i>a<sub>γ</sub></i>	<i>b<sub>α</sub></i>

# グレコ・ラテン方陣と魔方陣

1	2	3	+	1	2	3	=	11	22	33
3	1	2		2	3	1		32	13	21
2	3	1		3	1	2		23	31	12

3進法にするため  
1引いてみる

00	11	22
21	02	10
12	20	01

10進表示  
そして1足す


		2		7		3		
	7		4		2		8	
		9		8		7		
	3		7		1		4	
7		5				6		2
	4		2		6		7	
3		7				1		5
	2		5		7		6	
6		4				2		7

		4	3		1	7		
	7	1				6	5	
		8		7		1		
7	4			2			9	1
		5	7	1	4	8		
	1			5			7	
2	5						1	7
4	6		1		7		8	5
		7	5		2	4		