１４．例題

代数 Ⅰ

xy平面において，点$P(x, y)$を点$P'(x', y')$に移す線型変換

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

を考える．このとき，次の4つの行列は行列の乗法にかんして，クラインの4元群をなす.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

恒等変換，x軸対称，y軸対称，原点対称

xy平面において，点$P(x, y)$を直線$y=mx$に関して対称な点Qに移す変換を表す行列は

$$A=\frac{1}{1+m^2}\begin{bmatrix}1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1\end{bmatrix}$$

によって与えられる．このとき，単位行列

$$E=\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

とすれば，点Pを，点R，Sに移す変換を表す行列は$-A, -E$となる．

$G=\{E, A, -A, -E\}$

$m = \tan\theta$とおくと

$$A = \begin{bmatrix} con2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} con2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$