01. 約数と整除

代数Ⅱ

群

- 空でない集合Gに対して，ある演算＊が定義

（1）閉鎖律

（2）結合律 $(x*y)*z = x*(y*z)$

（3）単位元 e の存在 $e*x = x*e = x$

（4）逆元 x'の存在 $x'*x = x*x' = e$

（5）可換律 $x*y = y*x$

可換群

環と体

環

2つの演算（加法と乗算とすれば）に対して

(1)加法に関して群

(2)乗法に関して結合律

(3)乗法単位元が存在

(4)分配律

体

環に対して除算が成立

すなわち

(1)零元以外が可逆元

→（斜体）

(2)乗法に関して可換

整域

- 零因子：非零の元で演算の結果，零元0となる因子のことをいう

$$ab = 0(a \neq 0, b \neq 0)$$

- 単位元1を持つ可換環で零因子が存在しないとき整域という

法4の剰余類（剰余環）

$$Z_4 = \{0,1,2,3\}$$

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

加法群
加法単位元　0

加法において逆元が存在
0については0
1については3
2については2
3については1

乗法に関して結合律を満たす

乗法単位元　1

加法と乗法に関して分配律を満たす

$$x(y+z) = xy + xz$$

例)　$1(2+3) = 2+3 = 1$

x	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

零因子
2・2=0から2
整域ではない

法5の剰余類（剰余環，整域，体）

$$Z_5 = \{0,1,2,3,4\}$$

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

加法群
加法単位元　0

加法において逆元が存在

乗法に関して結合律を満たす

乗法単位元　1

加法と乗法に関して分配律を満たす

$$x(y+z) = xy + xz$$

例)　$1(2+3) = 2+3 = 0$

逆元について
1については1
2については3
3については2
4については4

約数と整除

__除法定理__
2つの整数$a > 0, b$に対し,
$$b = qa + r, \qquad 0 \leq r \leq a$$
となるような整商qと剰余rが一意的に定まる

__整除関係__
（1）反射律　$a|a$
（2）反対称律　$a|b$　かつ　$\mathrm{b}|a$　ならば,　$\mathrm{b} = \pm a$
（3）推移律　$a|b$　かつ　$\mathrm{b}|c$　ならば,　$a|c$