03. 素数

代数Ⅱ

ユークリッドの素数定理

- 正の整数a
  - 約数　自明な約数　$\pm a,\ \pm 1$　と　真の約数
- 素数　$p \neq 1$
  - 自明な約数以外に約数を持たない
- 合成数a
  - 1でも素数でもない正の整数
  - $a = bc$　aより小さい因数　＝　余因数
  - 余因数が素数ならば　素因数

エラトステネスの篩

- エラトステネス
  - 紀元前250年ごろのギリシャの数学者

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45			

Nまでの数の素数を求める

Step1:k=1は単位数で素数ではない
Step2: k=k+1　には×が付いていない
　　　ならば　k は　素数である
Step3: k の倍数に×をつける
Step4: k $< \sqrt{N}$ ならばStep2に戻る

定理

- ユークリッドの第1定理
  - $p|ab$ならば$p|a$または$p|b$
- ユークリッドの第2定理
  - 素数は無限個存在する
- 素因数分解定理
  - 任意の正整数$a \neq 1$は素因数の積に順序を除けば一意的に分解される

素数の兄弟

- 差が1の素数の対　2と3のみ
- 差が2の素数の対　双子素数
- 三つ子素数
  - (p,p+2,p+6) または　(p,p+4,p+6)
- 四つ後素数
  - (p,p+2,p+6,p+8)

(5,7,11,13)　, (11,13,17,19) etc.

- いとこ素数
  - (p,p+4)
- セクシー素数
  - (p,p+6)

5つ子素数
(5,7,11,13,17)　, (11,13,17,19,23), (101,103,107,109,113) etc.

素数定理

- ガウス15歳（1792年）

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\log n}$$

nを超えない正の整数の中の素数の数

$$1200 = 2^4 \times 3 \times 5^2$$

$$\log 1200 = 4\log 2 + \log 3 + 2\log 5$$
$$= 7.0902$$

$-\pi(n) \fallingdotseq \frac{1200}{7.09} \fallingdotseq 169$　実際は196個