04. 約数の和と完全数

代数Ⅱ

約数の個数

- 6個の約数を持つような，なるべく小さい正の整数は何か？

前回の解答：1000003が素数

- 1000001=101×9901
- 1000007=29×34483
- 1000009=293×3413

- 正の整数aの素因数分解を

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} \text{(標準分解)}$$

とすれば，その約数（正のみ）は

$$p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_r^{\beta_r} \ (0 \le \beta_i \le \alpha_i)$$

の形をしている. したがって aの約数の個数は

$$\tau(a) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_r + 1)$$

で与えられる.

約数の個数を与える関数 $\tau(a)$ は乗法的

$$(a,b) = 1 \text{ならば}, \qquad \tau(ab) = \tau(a)\tau(b)$$

完全平方数

- 完全平方数・・・平方根が整数

aが完全平方数ならば aは奇数個の約数をもつ

約数の和

- p^α(pは素数)の約数の和は

$$1+p+\cdots+p^\alpha=\frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}$$

- 正の整数 $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ (標準分解)
  のすべての約数の和は

$$\sigma(a)=(1+p_1+\cdots+p_1^{\alpha_1})\cdots\cdots(1+p_r+\cdots+p_r^{\alpha_r})$$

$$=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdots\cdots\frac{p_r^{\alpha_r+1}-1}{p_r-1}$$

で与えられる．関数σは乗法的である．

完全数，３角数

- 完全数
  - 正の整数aは，a自身を除く約数の和が元のaに等しい
- ３角数
  - 1からmまでの整数の和は，底辺がmの3角数
  - 3角数は完全数である.
  - $m=2^n-1$が素数ならば$\Delta(m)=2^{n-1}(2^n-1)$