08．連分数とユークリッドの互除法

代数Ⅱ

連分数

- 有限連分数，無限連分数
- 正則連分数

$$\langle q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, \cdots \rangle = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{q_4 + \cfrac{1}{q_5 + \cdots}}}}$$

連分数表示　例題

$$\frac{105}{38} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}}} = \langle 2,1,3,4,2 \rangle$$

$$\begin{array}{cccccc}
 & 2 & 4 & 3 & 1 & 2 \\
1 & \overline{)2} & \overline{)9} & \overline{)29} & \overline{)38} & \overline{)105} \\
 & \underline{2} & \underline{8} & \underline{27} & \underline{29} & \underline{76} \\
 & 0 & 1 & 2 & 9 & 29
\end{array}$$

一次不定方程式

$\boxed{\begin{array}{l} (m,n) = d \text{に対して} \\ am + bn = d \text{を満たす} a, b \in Z \text{が存在する} \end{array}}$

$m = qn + r$

$r \neq 0$ならば

$n = q_1 t + r_1$

$r = q_2 r_1 + r_2$

$r_1 = q_3 r_2 + r_3$

$\vdots$

$r_{k-3} = q_{k-1} r_{k-2} + r_{k-1} \quad \cdots①$

$r_{k-2} = q_k r_{k-1} + r_k \quad \cdots②$

$r_{k-1} = q_{k+1} r_k$

②より

$r_k = r_{k-2} - q_k r_{k-1}$

①より

$r_{k-1} = r_{k-3} - q_{k-1} r_{k-2}$

を代入して

$r_k = (1 + q_k q_{k-1}) r_{k-2} - q_k r_{k-3}$

繰り返しによって，

$r_k = a_1 r_1 + a_0 r$を満たす$\exists a_1, a_0 \in Z$

$r_1 = n - q_1$と$r = m - q_n$を代入

$r_k = (a_1 - (a_0 - a_1 q_1) q) n + (a_0 - a_1 q_1) m$

すなわち$d = an + bm$とかける

不定方程式を解く

不定方程式

$ax+by=d$

アルゴリズム

$(i)\,a_0=a, a_1=b$とおき，$i=1$から計算

$(ii)\,a_i=0$のとき，$d=a_{i-1}$とおいて終了

$(iii)\,a_i\neq 0$のとき

$a_{i-1}=a_iq_i+a_{i+1}\quad (0\le a_{i+1}<|a_i|)$

によりa_{i+1}を定め，iの値を1増やして(ii)へ

$$\begin{pmatrix} a_{i-1} \\ a_i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_i \\ a_{i+1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_i \\ a_{i+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} q_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a_{i-1} \\ a_i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{i-1} \\ a_i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{i-1} \\ a_i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_{i-1} \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

i回目で$a_i=0$のとき

$$\begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_{i-1} \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

不定方程式の例

$a=30, b=22$

$30=1\times 22+8$

$22=2\times 8+6$

$8=1\times 6+2$

$6=3\times 2$

$30x+22y=2$の不定方程式の解は

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}$$

ひとつの解は

$x=3, y=-4$

今日の提出

(1)

$$7x+11y=1$$

の一つの解を求めよ

(2)

$\frac{11}{7}$を連分数表示せよ