03. 環の例題

代数Ⅱ

環の定義

２つの演算（加法と乗算とすれば）に対して

(1)加法に関して群

(2)乗法に関して結合律

(3)乗法単位元が存在

(4)分配律

剰余環

- 剰余類は環となる ⇒ 剰余環

$$Z_4 = \{0,1,2,3\}$$

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

x	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

全行列環

- Kを体とするとき，
  Kの元を成分とするn次正方行列の全体
  $$M_n(k)$$
  は零因子をもつ非可換な環となる

行列AとBをn次正方行列とするとき，和と積を

$$A + B,\ \ AB$$

と定義する．

行列の和と積

- 行列の和
  - 閉鎖律
    結果もn次正方行列
  - 結合律
    満足する
  - 単位元（ゼロ元）
    ゼロ行列
  - 逆元
    Aに対して$-A$

  加法に関して群となる

- 行列の積
  - 閉鎖律
    結果もn次正方行列
  - 結合律
    満足する
  - 単位元
    単位行列E_n
    $\forall A \in M_n(K)$,
    $AE_n = E_n A = A$
  - 逆元
    必ず存在するといえない

行列の和と積

- 分配率

$$A(B + C) = AB + AC$$

⇒環となる

- 可換ではない

$$AB \neq BA$$

- 逆元について

$$\exists B \in M_n(K), AB = BA = E_n \quad \Leftrightarrow \quad \det(A) \neq 0$$

問1

- 2次の正方行列において零因子の例を示せ

問2

- 整数の元で作られる2次の正方行列の全体
$$M_2(Z)$$
において可逆元の全体の集合$U(M_2(Z))$
を示せ.