5. 準同型写像，準同型定理

代数 II

既約剰余類の部分群

$$Z_6^{\times} = \{1,5\}$$

×	1	5
1	1	5
5	5	1

$$\{1\}, \{1,5\}$$

自明な部分群

単位元のみの部分群$\{1\}$

全体集合$\{1,5\}$

ともに正規部分群

既約剰余類の部分群

$$Z_9^{\times}=\{1,2,4,5,7,8\}$$

×	1	2	4	5	7	8
1	1	2	4	5	7	8
2	2	4	8	1	5	7
4	4	8	7	2	1	5
5	5	1	2	7	8	4
7	7	5	1	8	4	2
8	8	7	5	4	2	1

自明な部分群

$\{1\},\{1,2,4,5,7,8\}$

生成元は2と5

4からは{4,7,1}

7からは{7,4,1}

8からは{8,1}

すべて正規部分群

既約剰余類の部分群

$$Z_{12}^{\times} = \{1,5,7,11\}$$

×	1	5	7	11
1	1	5	7	11
5	5	1	11	7
7	7	11	1	5
11	11	7	5	1

自明な部分群

$\{1\}, \{1,5,7,11\}$

5からは$\{5,1\}$

7からは$\{7,1\}$

11からは$\{11,1\}$

既約剰余類は乗法において可換

すべて正規部分群

準同型写像と同型写像

演算$\circ$をもつ群$(G,\circ)$と演算$*$をもつ群$(G',*)$に対して

GからG'への写像$f:G\to G'$が

$$\forall a,b\in G,\ f(a\circ b)=f(a)*f(b)$$

なる条件を満足しているとき，fをGからG'への

準同型写像という．

全単射となる準同型写像を同型写像という．

群Gから群G'への同型写像fが存在するとき，

GとG'は同型といい，$G\cong G'$と書く．特に

$G=G'$のとき，GからG'への同型写像fを

Gの自己同型写像という．

環の準同型写像

- 環から環への写像において

$$G\text{から}G'\text{への写像}f : G \to G'\text{が}$$

$$\forall a, b \in G,\ f(a \circ b) = f(a) * f(b)$$

  が満たされるならば，準同型写像
- 写像が全単射のとき同型写像
  - 全射・・・全てが移動される
  - 単射・・・1対1の対応

準同型定理

G, G'を群, fをGからG'への準同型写像とし, $K=\ker f$とする. G/Kの元aKにG'の元$f(a)$を対応させる写像$\bar{f}$は, 剰余群G/Kから群G'への単準同型写像になる. すなわち, $G/\ker f \cong f(G)$.

また, $\bar{f}$は$\pi : G \to G/K$を自然な準同型写像とすると$f = \bar{f} \circ \pi$を満たしている.

恒等写像

- 集合Aの任意の元aに対して集合Aの同じ元aを対応させると，これはAからAへの写像となる.

- 整数から整数への写像fについて

$$f(1) = 1 \in Z$$

$$f(2) = 2 \in Z$$

整数から整数への準同型写像

fをZからZへの準同型写像とする.

まず，乗法単位元$1\in Z$について言えば,

$f(1)=1$である.

$$f(2)=f(1+1)=f(1)+f(1)=2$$

$$f(3)=f(2+1)=f(2)+f(1)=3$$

一般にnが正の整数に対して$f(n)=n$が満たされる.

また，$f(-n)=-f(n)$が整数は加法群であることから

いえる．そして$f(0)=0$である．したがって,

fは恒等写像である

定義（環の準同型写像）

R, R'を環とし、fをRからR'への写像とする。任意の$a, b \in R$に対して

$$f(a+b) = f(a) + f(b), f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b), f(1_R) = 1_{R'}$$

fをRからR'への環の準同型写像

fが単射 → fを環の単準同型写像

fが全射 → fを環の全準同型写像

fが全単射 → fを環の同型写像

直積Z×Zは成分ごとに加法と乗法が
定義されて環となる.
この直積Z×ZからZへの準同型写像を
全て求めよ

m, nを互いに素な自然数とする.
剰余環$\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n$の元をそれぞれ
$\overline{a}, \tilde{a}$で表し，写像
$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \quad \left(f(a) = (\overline{a}, \tilde{a})\right)$
を考える．このとき，次を示せ.
(1) fは準同型写像である.