6. 多項式環
（直積の復習）

代数Ⅱ

直積Z×Zは成分ごとに加法と乗法が定義されて環となる

直積$\mathrm{Z}\times\mathrm{Z}=\{(x,y)\mid x,y\in Z\}$

和$(x,y),(x',y')\in \mathrm{Z}\times\mathrm{Z}$に対して$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$

積$(x,y),(x',y')\in \mathrm{Z}\times\mathrm{Z}$に対して$(x,y)\cdot(x',y')=(xx',yy')$

環となることを示そう

例$Z_2 \times Z_3 = \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2)\}$

Z_2とZ_3は加法において巡回群

$Z_2 \times Z_3$もまた加法において巡回群

多項式

R上のXの多項式

$$f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \quad (a_i \in R)$$

R上の多項式全体の集合を$R[X]$

多項式の和と積

R上のある多項式$f(X), g(X)$

$$f(X)+g(X)=\sum_{i}(a_i+b_i)X^i$$

$$f(X)\cdot g(X)=\sum_{k}\left(\sum_{i+j=k}a_ib_j\right)X^k$$

2つの演算に関して可換環である

代入の原理

環LをRの部分環とするような環とし,

Lの元αはRの全ての元と可換とする.

$R[X]$の元$f(X), g(X)$について，次が成り立つ.

(i) $f(X)+g(X)=\xi(X) \Rightarrow f(\alpha)+g(\alpha)=\xi(\alpha)$

(ii) $f(X)\cdot g(X)=\eta(X) \Rightarrow f(\alpha)+g(\alpha)=\eta(\alpha)$

除法の定理

Kを体とする.2つの多項式$f(X), g(X) \in K[X]$
について，$g(X) \neq 0$とすると$f(X) = q(X)g(X) + r(X)$
を満足する多項式$q(X), r(X) \in K[X]$が存在する.
ただし$r[X]$は0であるか，または次数が$g(X)$の
次数より小さい多項式とする.

因数定理

$f(X) \in K[X], \alpha \in K$とする．このとき$f(\alpha) = 0$ならば，ある多項式$g(X) \in K[X]$が存在して$f(X) = (X - \alpha)g(X)$と表される．