

7. 多項式環 (直積の復習)

代数 II

直積 $Z \times Z$ は成分ごとに加法と乗法が定義されて環となる

$$\text{直積 } Z \times Z = \{(x, y) \mid x, y \in Z\}$$

$$\text{和 } (x, y), (x', y') \in Z \times Z \text{ に対して } (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

$$\text{積 } (x, y), (x', y') \in Z \times Z \text{ に対して } (x, y) \cdot (x', y') = (xx', yy')$$

環となることを示そう

例 $Z_2 \times Z_3 = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2)\}$

Z_2 と Z_3 は加法において巡回群

$Z_2 \times Z_3$ もまた加法において巡回群

多項式

R 上の X の多項式

$$f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \quad (a_i \in R)$$

R 上の多項式全体の集合を $R[X]$

多項式の和と積

R 上のある多項式 $f(X), g(X)$

$$f(X) + g(X) = \sum_i (a_i + b_i) X^i$$

$$f(X) \cdot g(X) = \sum_k \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) X^k$$

2つの演算に関して可換環である

代入の原理

環 L を R の部分環とするような環とし、

L の元 α は R の全ての元と可換とする。

$R[X]$ の元 $f(X), g(X)$ について、次が成り立つ。

$$(i) f(X) + g(X) = \xi(X) \Rightarrow f(\alpha) + g(\alpha) = \xi(\alpha)$$

$$(ii) f(X) \cdot g(X) = \eta(X) \Rightarrow f(\alpha) \cdot g(\alpha) = \eta(\alpha)$$

除法の定理

K を体とする. 2つの多項式 $f(X), g(X) \in K[X]$ について, $g(X) \neq 0$ とすると $f(X) = q(X)g(X) + r(X)$ を満足する多項式 $q(X), r(X) \in K[X]$ が存在する. ただし $r(X)$ は0であるか, または次数が $g(X)$ の次数より小さい多項式とする.

因数定理

$f(X) \in K[X], \alpha \in K$ とする. このとき $f(\alpha) = 0$ ならば, ある多項式 $g(X) \in K[X]$ が存在して $f(X) = (X - \alpha)g(X)$ と表される.