

09. 環と体1

代数演習1

群

- ・ 2元演算の加法において群をなすとき加法群
- ・ 乗法であれば, 乗法群
- ・ 加法における単位元は一般に 0
- ・ 乗法における単位元は一般に 1

環と体

環

2つの演算(加法と乗算とすれば)に対して

- (1) 加法に関して群
- (2) 乗法に関して結合律
- (3) 乗法単位元が存在
- (4) 分配律

体

環に対して除算が成立すなわち

- (1) 零元以外が可逆元
→(斜体)
- (2) 乗法に関して可換

整域

- ・ 零因子: 非零の元で演算の結果, 零元0となる因子のことをいう

$$ab = 0(a \neq 0, b \neq 0)$$

- ・ 単位元1を持つ可換環で零因子が存在しないとき整域という

法4の剰余類(剰余環)

$$Z_4 = \{0,1,2,3\}$$

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

乗法に関して結合律を満たす

乗法単位元 1

加法と乗法に関して分配律を満たす

$$x(y+z) = xy+xz$$

例) $1(2+3) = 2+3=1$

加法群
加法単位元 0

加法において逆元が存在
0については0
1については3
2については2
3については1

x	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

零因子
 $2 \cdot 2 = 0$ から2
整域ではない

法5の剰余類(剰余環, 整域, 体)

$$Z_5 = \{0,1,2,3,4\}$$

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

乗法に関して結合律を満たす

乗法単位元 1

加法と乗法に関して分配律を満たす

$$x(y+z) = xy+xz$$

例) $1(2+3) = 2+3=0$

加法群
加法単位元 0

加法において逆元が存在

逆元について
1については1
2については3
3については2
4については4