

11. ブール環

代数演習 1

基本事項

- ・ n個の元からなる集合

$$S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

- ・ 有限集合Sがn個の元からなるならば、Sの部分集合は全部で 2^n 個ある
- ・ ベキ集合・・・集合Sのすべての部分集合の全体をSのベキ集合と呼ぶ

$$P(S) = \{S, \phi, A, B, C, \dots\}$$

A, B, C, \dots はSの部分集合である

ベキ集合が環となるために

(1) $P(S)$ は加法 $A+B$ に関して可換群

(2) $P(S)$ は乗法 AB に関して半群

ただし、乗法に関する単位元が存在

乗法において可換

(3) 分配律

$$A(B+C) = AB+AC$$

$$(B+C)A = BA+CA$$

乗法で可換であれば、分配律は片側で省略できる

加法を定義

- ・ AとBの加法をAとBの合併集合 $A \cup B$ から共通集合 $A \cap B$ を除外してできる部分集合と定義

$$A+B = A \cup B - A \cap B$$

閉鎖律: $A+B$ もSの部分集合

結合律: $(A+B)+C = A+(B+C)$

可換律: $A+B = B+A$

乗法を定義

$$AB = A \cap B$$

閉鎖律: $A \cap B$ もSの部分集合

結合律: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

可換律: $A \cap B = B \cap A$

ブール環の表現

- ・ 2進n桁数

- ・ 2つの2進数の加法と乗法をそれぞれ各桁におけるmod2の和と積をとるとする。

- この演算に繰り上げはないとする。

11010	11010
+10110	×10110
01100	10010