

# 代数演習 1 (2010 前期)

## 試験対策

平成 22 年 7 月 17 日

- [1] 外延的定義法と内包的定義法について説明せよ。
- [2] 正三角形の合同変換について変換を定義し，演算表を作成せよ。
- [3] 正方形の合同変換について
  - (a) 変換を全て述べて定義せよ
  - (b) 定義した変換について，その積の演算表を作成せよ。
- [4] 正 6 角形の合同変換について
  - (a) 変換を全て述べて定義せよ
  - (b) 定義した変換について，その積の演算表を作成せよ。

- [5] 次式を満たす  $x$  を求めよ

$$123456^x \equiv 1 \pmod{11}$$

- [6] 位数 3 の集合  $S$  のべき集合  $P(S)$  に対して，加法と乗法の演算表を作成せよ。
- [7]  $\{1, -1, i, -i\}$  を図で示せ。
- [8]  $7^{31} \equiv \square \pmod{3}$
- [9]  $7^{99} \equiv \square \pmod{24}$
- [10]  $8^{103} \equiv \square \pmod{13}$
- [11]  $9^{53} \equiv \square \pmod{15}$
- [12]  $3^{12} \equiv \square \pmod{7}$
- [13]  $5^{105}$  を 7 で割った余りを求めよ。
- [14] 亜群，半群，モノイド，群がそれぞれ成り立つときの例を考えよ。
- [15] 次の集合算を整理し，その結果をヴェン図で示せ。

$$A \cap B \cup \bar{A} \cap (B \cup C)$$

- [16] 法 6 の剰余類について元と部分集合を全て示せ .
- [17] 法 7 の剰余類は群 , 環 , 体のどれにあてはまるのか , また , どれにも当てはまらないのか , 演算表と理由も含めて解答しなさい .
- [18] 法 7 の剰余類  $\mathbb{Z}_7$  の剰余類は群 , 環 , 体のどれに当てはまるのか ? また , どれにも当てはまらないかの科 ? 演算表と理由も含めて解答しなさい .
- [19] 法 7 の剰余類  $\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  と  $\mathbb{Z}_7^* = \mathbb{Z}_7 - \{0\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  の演算表を作れ .
- [20]  $S = \{0, 2, 4, 6, 8\}(\text{mod } 10)$  の乗法において演算表を作成せよ .
- [21] 法 9 の剰余類について
- 演算表を作成せよ
  - 加法 , 乗法について群かどうか調べよ .
- [22] 次の合同式をフェルマーの定理を使用せず解きなさい , また途中の式も書きなさい .
- $7^{99} \equiv \square (\text{mod } 24)$
  - $8^{100} \equiv \square (\text{mod } 63)$
  - $3^{39} \equiv \square (\text{mod } 17)$
- [23]  $5^{105}$  を 7 で割った余りを求めよ .
- [24]  $S = \{1, 3, 5, 7\}(\text{mod } 13)$  は群となるか ?
- [25] ブール環の演算をせよ .
- [26]  $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$  のべき集合を答えよ .
- [27] カタラン数について 4 個の元の積  $a, b, c, d$  において , 括弧の付け方の組み合わせを全て列挙せよ .
- [28] カタラン数について答えよ .
- カタラン数の計算式を示せ .
  - 6 つの因子の順序を変えない括弧の付け方の個数を計算せよ .
  - 8 角形に互いに交わらない対角線によって 3 角形に分割する仕方は何通りか ?
- [29]  $\Omega = \{x|x : \text{整数}, 1 \leq x \leq 20\}$ ,  $A = \{x|x : 2 \text{ の倍数}\}$ ,  $B = \{x|x : 3 \text{ の倍数}\}$ ,  $C = \{x|x : 4 \text{ の倍数}\}$  のとき ,  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $B \cup C$ ,  $B \cap C$ ,  $A \Delta B$ ,  $B \Delta C$  の集合の演算をせよ .
- [30] 「 $2^{2n+1} + 3^{2n+1}$  は 7 の倍数に等しい」これを数学的帰納法を用いて証明せよ .
- [31]  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  の集合について加法において群かどうか調べよ .

- [32] ハミルトン 4 元数の基本公式から各条件を求めよ .
- [33] 複素数において集合  $\{1, -1, i, -i\}$  の乗法の演算表を作成せよ .
- [34] 集合算の公式を示せ .
- (a) 可換律 :  $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
- (b) 結合律 :  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- (c) 分配律 :  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- [35] ブール環の加法において結合律が成り立つことを示せ .  
ブール環では , 加法を排他的論理和  $\vee$  または対称差  $\Delta$  を用いる .
- [36] 真部分集合について説明せよ .
- [37] 巡回群について説明しなさい .
- [38]  $S = \{1, 3, 4\} \pmod{6}$  の加法について考えよ .
- [39] 1 の 5 乗根を求めよ .
- [40] ハミルトンの 4 元数の基本公式から各条件を求めよ .
- [41] 6 つの因子の順序を変えない括弧の付け方の個数を計算せよ .
- [42] ド・モアブルの定理を書け .
- [43] 1 の 4 乗根を巡回群とする生成元を求めよ .
- [44] 1 の 5 乗根を巡回群とする生成元を求めよ .
- [45] 1 の 6 乗根を巡回群とする生成元を求めよ .
- [46] 1 の 3,4 乗根をすべて足すといくつになるか確認せよ .
- [47] 1 の 2 乗根から 6 乗根までを求めよ .