01：行基本変形とランク

線形代数演習

復習

行列の定義

m×n個の数を長方形に並べたもの

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

m×n行列　　(m,n)型行列　　m行n列の行列

全ての要素が実数のとき，実数行列と呼ぶ

(1,1)成分

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} \text{第1列} & \quad & \text{第j列} & \quad & \text{第n列} \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{第1行} \\ \\ \text{第i行} \\ \\ \text{第m行} \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

(i,j)成分

行列の例

- 太郎君の昨日の昼食代380円，夕食代560円，今日は昼食代280円，夕食代1050円でした．

$$
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} \text{昨日} \\ \text{今日} \end{array} & \begin{pmatrix} 380 & 560 \\ 280 & 1050 \end{pmatrix} \\
 & \begin{array}{cc} \text{昼食} & \text{夕食} \end{array}
\end{array}
$$

行列の演算（相等）

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij} \iff \begin{matrix} a_{11} = b_{11} & a_{12} = b_{12} \\ a_{21} = b_{21} & a_{22} = b_{22} \end{matrix}$$

行列の演算（和と差）

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{pmatrix}$$

行列の演算（スカラー倍）

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}$$

ゼロ行列

$$O = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + O = O + A = A$$

$$A + (-A) = (-A) + A = O$$

行列の演算(積)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

積の規則

$$\begin{array}{ccccc} A & & B & & AB \\ (l,\boxed{m})\text{型} & \times & (\boxed{m},n)\text{型} & = & (l,n)\text{型} \end{array}$$

正方行列

- (n, n)型の行列をn次の正方行列という.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

単位行列

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AE = EA = A$$

逆行列

n次の正方行列Aに対して

$$AX = XA = E$$

となるn次の正方行列Xが存在するとき

A : 正則

X : Aの逆行列

積の逆行列

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} \\ &= AA^{-1} \\ &= E\end{aligned}$$

連立1次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

連立一次方程式

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

係数行列 A　　　x　　b

連立1次方程式

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

係数行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

拡大係数行列

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

同値変形　→　行基本変形

I. 2つの式（行）を入れ替える
II. ある式（行）をk倍（$k \neq 0$）する
III. ある式（行）に他の式（行）をk倍して加える

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases} \quad \underset{②'-①\times 2}{\overset{①\times 2+②}{\rightleftarrows}} \quad \begin{cases} x + y = 2 \\ 5x \quad\quad = 5 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rr} & 2x + 2y = 4 \\ +) & 3x - 2y = 1 \\ \hline & 5x + 0y = 5 \end{array}$$