

01：行基本変形とランク

線形代数演習

復習

行列の定義

$m \times n$ 個の数を長方形に並べたもの

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

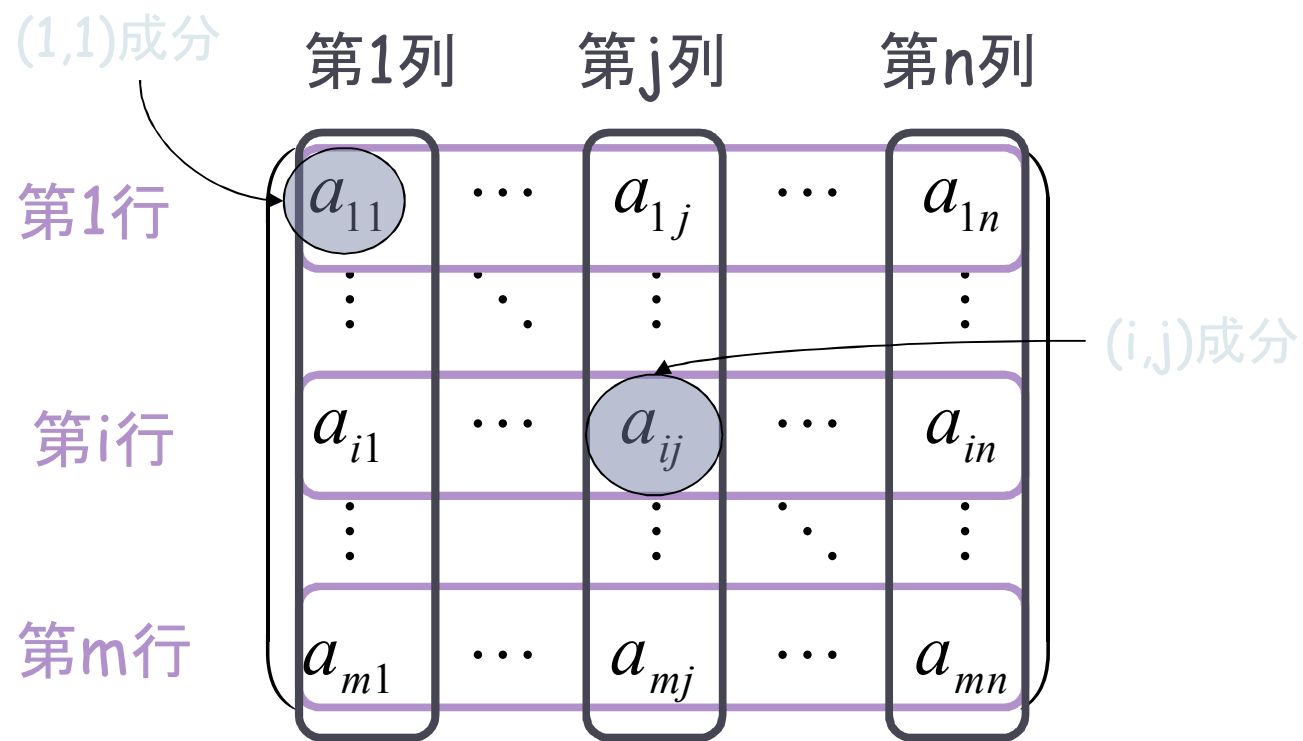
$m \times n$ 行列

(m,n) 型行列

m 行 n 列の行列

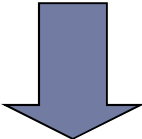
全ての要素が実数のとき, 実数行列と呼ぶ





行列の例

- ▶ 太郎君の昨日の昼食代380円，夕食代560円，今日は昼食代280円，夕食代1050円でした.


$$\begin{array}{l} \text{昨日} \\ \text{今日} \end{array} \begin{pmatrix} 380 & 560 \\ 280 & 1050 \end{pmatrix}$$

昼食 夕食



行列の演算 (相等)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij} \iff \begin{array}{ll} a_{11} = b_{11} & a_{12} = b_{12} \\ a_{21} = b_{21} & a_{22} = b_{22} \end{array}$$



行列の演算 (和と差)

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{pmatrix}$$



行列の演算 (スカラー倍)

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}$$



ゼロ行列

$$O = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + O = O + A = A$$

$$A + (-A) = (-A) + A = O$$



行列の演算(積)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$



積の規則

$$\begin{array}{ccc} A & B & AB \\ (l, m)\text{型} & \times & (m, n)\text{型} = (l, n)\text{型} \end{array}$$



正方行列

- ▶ (n, n)型の行列をn次の正方行列という.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$



单位行列

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AE = EA = A$$



逆行列

n 次の正方行列 A に対して

$$AX = XA = E$$

となる n 次の正方行列 X が存在するとき

A : 正則

X : A の逆行列



積の逆行列

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} \\ &= AA^{-1} \\ &= E\end{aligned}$$



連立1次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$



連立一次方程式

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

係数行列 A x b



連立1次方程式

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

係数行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

拡大係数行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 2 \\ 3 & -2 & | & 1 \end{pmatrix}$$



同値変形 → 行基本変形

- I. 2つの式(行)を入れ替える
- II. ある式(行)を k 倍($k \neq 0$)する
- III. ある式(行)に他の式(行)を k 倍して加える



$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 2 \\ 3x - 2y = 1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\textcircled{1} \times 2 + \textcircled{2}} \\ \xleftarrow{\textcircled{2}' - \textcircled{1} \times 2} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} x + y = 2 \\ 5x = 5 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} 2x + 2y = 4 \\ +) \quad 3x - 2y = 1 \\ \hline 5x + 0y = 5 \end{array}$$

