02：掃出し法１（連立1次方程式）

線形代数演習

①

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ 2x + 2y = 60 \end{cases}$$

②

$$\begin{cases} 2x + 5y = 12 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases}$$

③

$$\begin{cases} 3x - 5y = 0 \\ -3x + 5y = 0 \end{cases}$$

①

$$\begin{cases} x+y=30 \\ 2x+2y=60 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 30 \\ 2 & 2 & 60 \end{array}\right) \xrightarrow{②+①\times(-2)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 30 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ランクは1，自由度1　解は一意に定まらない

②

$$\begin{cases} 2x+5y=12 \\ 4x-2y=0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 12 \\ 4 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{②+①\times(-2)} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 12 \\ 0 & -12 & -24 \end{array}\right)$$

ランクは2，自由度0　解は一意に定まる

$$\xrightarrow{②\times(-\frac{1}{12})} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 12 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{①+②\times(-5)} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{①\times(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

③

$$\begin{cases} 3x-5y=0 \\ -3x+5y=0 \end{cases}$$

特別な形である, $x=y=0$は自明な解

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -5 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{②+①} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ランクは1, 自由度1　解は一意に定まらない

①

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ 2x + 2y = 60 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 30 \\ 2 & 2 & 60 \end{array}\right) \xrightarrow{②+①\times(-2)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 30 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ランクは１，自由度１　解は一意に定まらない

yは自由に決められるとすると，$y = t$ （tは任意の数）とおく

$$x = 30 - t$$

$$\begin{cases} x = 30 - t \\ y = t \end{cases}, (t\text{は任意の数})$$

③

$$\begin{cases} 3x-5y=0 \\ -3x+5y=0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -5 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{②+①} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ランクは1，自由度1　解は一意に定まらない

yは自由に決められるとすると，$y=t$　（tは任意の数）とおく

$$x=\frac{5}{3}t$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{5t}{3} \\ y=t \end{cases},(t\text{は任意の数})$$

演習1.4（1）

$$\begin{cases} 6x+3y=15 \\ 5z+y+2x=8 \\ 2y+3x+4z=7 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 6x+3y+0z=15 \\ 2x+y+5z=8 \\ 3x+2y+4z=7 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 0 & 15 \\ 2 & 1 & 5 & 8 \\ 3 & 2 & 4 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{①\times(\frac{1}{6})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ 2 & 1 & 5 & 8 \\ 3 & 2 & 4 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[③+①\times(-3)]{②+①\times(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & 4 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{②\leftrightarrow③} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 4 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

ランクは3，自由度0　解は一意に定まる

$$\xrightarrow{③\times\frac{1}{5}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 4 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} \end{array}\right) \xrightarrow{②+③\times(-4)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{29}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{②\times2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{29}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} \end{array}\right) \xrightarrow{①+②\times(-\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{27}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{29}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} \end{array}\right)$$

演習1.4(2)

$$\begin{cases} 5x-2y=3 \\ 4x-y=1 \\ 6x+3y=0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{①\times(\frac{1}{5})} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ 4 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[③+①\times(-6)]{②+①\times(-4)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & \frac{27}{5} & -\frac{18}{5} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[③+②\times(-6)]{②\times\frac{5}{3}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} \\ 0 & \frac{27}{5} & -\frac{18}{5} \end{array}\right) \xrightarrow{③+②\times(-\frac{27}{5})} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 9 \end{array}\right)$$

変でしょ

ランクは3，自由度0　解は一意に定まる

連立1次方程式の解法のポイント１

- 行列の行基本変形
  ① 1つの行を何倍かする
  ② 2つの行を入れ替える
  ③ 1つの行に他の行の何倍かを加える
- 簡約な行列
  - 行ベクトルのうち零ベクトルがあれば，それは零ベクトルでないものよりも下にある
  - 零ベクトルで無い行ベクトルの主成分は1である
  - 第i行の主成分をa_{ij_i}とすると$j_1 < j_2 < j_3 < \cdots$となる
  - 各行の主成分を含む列の他の成分はすべて0である

簡約な行列の例

$$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 7 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 6 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

・・・主成分

零行列，単位行列も簡約な行列

どのような行列も，（必要であれば列を交換して）行基本変形を有限回行い，

$$\begin{pmatrix} E_r & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の形に変形できる

連立1次方程式の解法のポイント2

- 連立方程式が解をもつ必要十分条件
$$r(A|b) = r(A)$$
- n変数の連立方程式が唯一解をもつ必要十分条件
$$r(A|b) = r(A) = n$$
- 同次形の連立一次方程式
$$Ax = 0$$
  - $x = 0$は自明な解
  - $m \times n$行列Aの
同次方程式$Ax = 0$の解が自明なものに限る必要十分条件
$$r(A) = n$$
  - $m < n$ならば$Ax = 0$は自明でない解をもつ

練習問題（連立1次方程式を解け）

① $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

② $$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

③ $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

④ $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 9 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

⑤ $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

⑥ $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

⑦ $$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解をもつためのa, bの条件を求めよ.

⑧ $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

⑨ $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$