04：ベクトル空間（行列式）

線形代数演習

行列式の計算ルール

ルール1：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ルール2：1つの行をc倍すると行列式はc倍

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ルール3：第i行が2つの行ベクトルの和である行列の行列式は，他の行は同じで，
第i行に各々の行ベクトルを取った行列の行列式の和になる．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{i2}+c_{i2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式の計算ルールつづき

ルール4：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots\cdots & \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ & \cdots\cdots & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ & \cdots\cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots\cdots & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ & \cdots\cdots & \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ & \cdots\cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ルール5：2つの行が等しい行列の行列式は0

ルール6：行列の1つの行に他の行の何倍かを加えても，行列式は変わらない

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots\cdots & \\ a_{i1}+ca_{j1} & \cdots & a_{in}+ca_{jn} \\ & \cdots\cdots & \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ & \cdots\cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots\cdots & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ & \cdots\cdots & \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ & \cdots\cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式の計算ルールつづき

ルール7：転置した行列の行列式は元の行列式に等しい

$$\det({}^tA) = \det(A)$$

ルール8：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ルール9：1つの列をc倍すると，行列式はc倍になる
ルール10：1つの列が2つの列ベクトルの和である行列の行列式は，他の列は同じで
その列に各々の列ベクトルをとった行列の行列式の和となる
ルール11：2つの列を入れ替えると行列式は−1である
ルール12：2つの列が等しい行列の行列式は0である
ルール13：1つの列に他の列の何倍かを加えても行列式は変わらない．
ルール14：Aがr次正方行列，Dがs正方行列ならば

$$\det\begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} A & O \\ C & D \end{bmatrix} = \det(A)\det(D)$$

復習

クラメルの公式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow Ax = b$$

$$|A| \neq 0$$

$$x_i = \frac{\det\left[a_1 \cdots \overset{i}{b} \cdots a_n\right]}{\det(A)}$$

$\left[a_1 \cdots \overset{i}{b} \cdots a_n\right]$は$A$の第$i$列を列ベクトル$b$で置き換えた行列

次の行列の余因子行列を求めよ．そしてそれを用いて逆行列を求めよ．

① $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$　② $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$　③ $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

クラメルの公式を用いて解け

④ $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

⑤ $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$