05：線形結合と連立方程式

線形代数演習

ベクトル空間

ベクトル空間

（1）実数を成分とするn次の列ベクトル全体をR^nと書く

$$R^n = \left\{ a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \middle| a_1, \cdots a_n \in R \right\}$$

R^nは行列としての和およびスカラー倍によってR上のベクトル空間となる

（2）実数を成分とするn次の行ベクトル全体をR_nと書く

$$R_n = \left\{ a = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \middle| a_1, \cdots a_n \in R \right\}$$

（3）実数を係数とするたかだかn次の多項式の全体を$R[x]_n$と書く

（4）区間(a,b)で連続な実数値関数全体を$C(a,b)$と書く

ベクトル空間

零ベクトル

ベクトル空間V の次の性質を満たすベクトル0をVの零ベクトル

$$u + 0 = 0 + u = u \qquad u \in V$$

部分空間

ベクトル空間V の部分集合Wが部分空間である必要十分条件は次の(i)(ii)(iii)を満たす

(i) $0 \in W$

(ii) $u, v \in W$ならば$u + v \in W$

(iii) $u \in W$, $c \in R$ならば$cu \in W$

例題

Aが$m \times n$行列のとき，次のWはR^nの部分空間

$$W = \{x \in R^n | Ax = 0\}$$

(i) $A0 = 0$であるから，$0 \in W$である

(ii) $x, y \in W$とすると

$$\mathrm{A}(x + y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$$

よって$x + y \in W$

(iii) $x \in W, c \in R$とすると

$$A(cx) = cA(x) = c0 = 0$$

よって$cx \in W$

問題　次のWはR^3の部分空間となるか

（1）

$$W = \left\{ x \in R^3 \middle| \begin{matrix} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{matrix} \right\}$$

（2）

$$W = \left\{ x \in R^3 \middle| \begin{matrix} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \end{matrix} \right\}$$

解空間

解空間

同次形の連立1次方程式の解の全体はR^nの部分空間をなしている
Wを同次形の連立1次方程式$Ax = 0$の解空間という

$$W = \{x \in R^n | Ax = 0\}$$

次のWは$R[x]_3$の部分空間となるか
（1） $W = \{f(x) \in R[x]_3 \ | \ f(1) = 0,\ f(-1) = 0\}$
（2） $W = \{f(x) \in R[x]_3 \ | \ f(1) = 1\}$
（3） $W = \{f(x) \in R[x]_3 \ | \ xf'(x) = 2f(x)\}$

（1） 部分空間である
（2） 部分空間ではない
（3） 部分空間である

線形結合

線形結合

V のベクトルvがVのベクトル$u_1, u_2, \cdots u_n$を用いて

$$v = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n \qquad c_i \in R$$

と書けるとき，ベクトルvは$u_1, u_2, \cdots u_n$の線形結合で書けるという

1次関係

ベクトル　$u_1, u_2, \cdots, u_n$が

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n = 0$$

をみたすとき，　これを　　ベクトル　$u_1, u_2, \cdots, u_n$の1次関係という

1次独立と1次従属

ベクトル$u_1, u_2, \cdots, u_n$が自明でない1次関係を持たない・・・・・・　1次独立

1次独立ではない時，1次従属

1次独立

定理4．6．1

k個のベクトル $a_1, a_2, \cdots, a_k$が1次独立であるための必要十分条件は

$$r(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_k) = k$$

となることである.

以下のベクトルの組が1次独立かどうか調べよ.

（1）

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

（2）

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

（3）

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

（1）

$$a_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&3\\2&7\end{pmatrix}\xrightarrow{②+①\times(-2)}\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{①+②\times(-3)}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$r\begin{pmatrix}1&3\\2&7\end{pmatrix}=2$$ 1次独立である

（2）

$$a_1=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&3\\1&2\\-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[③+②]{①+②\times(-2)}\begin{pmatrix}0&-1\\1&2\\0&3\end{pmatrix}\xrightarrow{①\times(-1)\leftrightarrow②}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\\0&3\end{pmatrix}\xrightarrow[③+②\times(-3)]{①+②\times(-2)}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$$r\begin{pmatrix}2&3\\1&2\\-1&1\end{pmatrix}=2$$ 1次独立である

（3）

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{①+② \times(-3)} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = 1$$ 1次従属である

以下のような1次結合で考えると自明な解以外を持つ，

$$c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$$

$c_1 = 2c_2$とあらわされるので，

$$2\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$$

$$2a_1 + a_2 = 0$$

$$a_2 = -2a_1$$ a_2はa_1の-2倍であるというように　従属している