06：一次独立と一次従属

線形代数演習

一次結合，一次独立と一次従属

一次結合，線形結合

V のベクトルvがVのベクトル$u_1, u_2, \cdots u_n$を用いて

$$v = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n \qquad c_i \in R$$

と書けるとき，ベクトルvは$u_1, u_2, \cdots u_n$の線形結合で書けるという

I次関係，線形関係

ベクトル $u_1, u_2, \cdots, u_n$が

$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n = 0$

をみたすとき，これを　ベクトル $u_1, u_2, \cdots, u_n$の1次関係という

線形独立と線型従属

ベクトル$u_1, u_2, \cdots, u_n$が自明でない1次関係を持たない・・・・・・ 1次独立
1次独立ではない時，1次従属

一次独立

定理4．6．1

k個のベクトル　$a_1, a_2, \cdots, a_k$が1次独立であるための必要十分条件は

$$r(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_k) = k$$

となることである．

以下のベクトルの組が一次独立かどうか調べよ.

（1）

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

（2）

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

（3）

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

（1）

$$a_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&3\\2&7\end{pmatrix}\xrightarrow{②+①\times(-2)}\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{①+②\times(-3)}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$r\begin{pmatrix}1&3\\2&7\end{pmatrix}=2$$ 1次独立である

（2）

$$a_1=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&3\\1&2\\-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[③+②]{①+②\times(-2)}\begin{pmatrix}0&-1\\1&2\\0&3\end{pmatrix}\xrightarrow{①\times(-1)\leftrightarrow②}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\\0&3\end{pmatrix}\xrightarrow[③+②\times(-3)]{①+②\times(-2)}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$$r\begin{pmatrix}2&3\\1&2\\-1&1\end{pmatrix}=2$$ 1次独立である

（3）

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{①+②\times(-3)} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = 1$$ 1次従属である

以下のような1次結合で考えると自明な解以外を持つ,

$$c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$$

$c_1 = 2c_2$とあらわされるので,

$$2\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$$

$$2a_1 + a_2 = 0$$

$a_2 = -2a_1$　　a_2はa_1の-2倍であるというように　従属している

ベクトルの1次独立な最大個数

次の列ベクトルの1次独立な最大個数rとr個の1次独立なベクトルを1組求め，
他のベクトルをこれらの一次結合で表せ.

$$a_1=\begin{bmatrix}1\\1\\3\\0\end{bmatrix}, a_2=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\-1\end{bmatrix}, a_3=\begin{bmatrix}1\\3\\-3\\-2\end{bmatrix}, a_4=\begin{bmatrix}-2\\-4\\1\\-1\end{bmatrix}, a_5=\begin{bmatrix}-1\\-4\\7\\0\end{bmatrix}$$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	
1	1	1	−2	−1	
1	2	3	−4	−4	
3	0	−3	1	7	
0	−1	−2	−1	0	
1	1	1	−2	−1	
0	1	2	−2	−3	②+①×(−1)
0	−3	−6	7	10	③+①×(−3)
0	−1	−2	−1	0	
1	0	−1	0	2	①+②×(−1)
0	1	2	−2	−3	
0	0	0	1	1	③+②×3
0	0	0	−3	−3	④+②
1	0	−1	0	2	
0	1	2	0	−1	②+③×2
0	0	0	1	1	
0	0	0	0	0	④+③×3
b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	

a_iとb_iの線形関係は同じ

b_1, b_2, b_4は一次独立

b_3, b_5は

$$b_3=-b_1+2b_2$$

$$b_5=2b_1-b_2+b_4$$

答

$$\begin{cases} a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\text{の一次独立な最大個数}r=3 \\ a_1, a_2, a_4\text{は一次独立} \\ a_3=-a_1+2a_2 \\ a_5=2a_1-a_2+a_4 \end{cases}$$