

## 09 内積

線形代数演習

### ベクトルの内積

2つのベクトル  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  のなす角を  $\theta$  とおく

このときの内積

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

内積とは、何か説明せよ.

## 問題

- ① ベクトル  $a = (a_1, a_2)$  の大きさ(ノルム)を示せ
- ② 2つのベクトル  $a = (a_1, a_2)$ ,  $b = (b_1, b_2)$  の内積を示せ
- ③ ②で分かったことを説明せよ
- ④ ベクトル  $a = (a_1, a_2)$  同士の内積を示せ
- ⑤ ①と④の関係式を示せ
- ⑥ ⑤を説明せよ
- ⑦ 2つのベクトル  $a, b$  のなす角が  $\theta$  であるとき, 内積を示せ
- ⑧ ⑦の結果は余弦定理からどのように導出されるか示せ
- ⑨ ⑦の結果を説明せよ
- ⑩ ②と⑦が等しいことを示せ

### P.89 問4.2.2次の等式を示せ

- (1)  $|a + b|^2 = |a|^2 + 2a \cdot b + |b|^2$
- (2)  $|a - b|^2 = |a|^2 - 2a \cdot b + |b|^2$
- (3)  $|a + b|^2 + |a - b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$
- (4)  $|a + b|^2 - |a - b|^2 = 4a \cdot b$

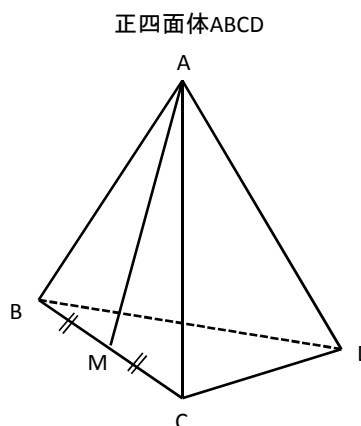
P.88 問4.2.1 図から各内積を求めよ

(1)  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AM}$

(2)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MC}$

(3)  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}$

(4)  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$



## 今日の提出

P.106 練習問題 4.4

2 A(-2,4,2), B(2,5,3), C(1,7,5)とするとき, 次の点の座標またはベクトルの成分を求めよ.

(1)ABの midpoint

(2)BCを1:3に内分する点

(3)ACを3:2に内分する点

(4) $\triangle ABC$ の重心

## 今日の解答

A(-2,4,2), B(2,5,3), C(1,7,5)

(1)ABの中点  $\left(\frac{-2+2}{2}, \frac{4+5}{2}, \frac{2+3}{2}\right) = \left(0, \frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right)$

(2)BCを1:3に内分する点

$$\frac{3 \cdot (2,5,3) + 1 \cdot (1,7,5)}{1+3} = \frac{1}{4}(6+1, 15+7, 9+5) = \frac{1}{4}(7, 22, 14)$$

(3)ACを3:2に内分する点

$$\frac{2 \cdot (-2,4,2) + 3 \cdot (1,7,5)}{3+2} = \frac{1}{5}(-4+3, 8+21, 4+15) = \frac{1}{5}(-1, 29, 19)$$

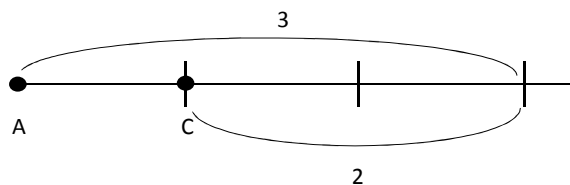
(4)△ABCの重心

$$\frac{(-2,4,2) + (2,5,3) + (1,7,5)}{3} = \frac{1}{3}(1, 16, 10)$$

## ついでに

A(-2,4,2), B(2,5,3), C(1,7,5)

(5)ACを3:2に外分する点



$$\frac{-2 \cdot (-2,4,2) + 3 \cdot (1,7,5)}{3-2} = (4+3, -8+21, -4+15) = (7, 13, 11)$$