１０　正規直交基底

線形代数演習

基底の定義

線形空間Vの元の組 $\{\boldsymbol{u_1},\cdots,\boldsymbol{u_n}\}$ が次の性質を満たしているとき，Vの基底という

1. $\boldsymbol{u_1},\cdots,\boldsymbol{u_n}$ は線形独立
2. Vの任意の元は $\boldsymbol{u_1},\cdots,\boldsymbol{u_n}$ の線形結合で書ける.

例：平面ベクトル $\boldsymbol{R}^2$

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

： 明らかに線形独立

$$\boldsymbol{R}^2\text{の任意のベクトル}\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2$$

正規直交基底

- ベクトル空間VはR上の内積空間とする。R^nの内積は標準とする。
- 次の条件を満たすVの基底$\{u_1, \cdots, u_n\}$を正規直交基底という。

$$u_i \cdot u_j = \delta_{ij} \quad (1 \le i, j \le n)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \ne j) \end{cases}$$ クロネッカーのデルタ

シュミットの直交化

- Vの1組の基底を$\{v_1, \cdots, v_n\}$とすると、正規直交基底$\{u_1, \cdots, u_n\}$で
$\langle u_1, \cdots, u_r \rangle_R = \langle v_1, \cdots, v_r \rangle_R \quad (1 \leq r \leq n)$
となるものが存在する。特に有限次元の内積空間は正規直交基底をもつ

$\langle u_1, \cdots, u_r \rangle_R$はこれらのベクトルで作られる部分空間である。

証明

$$u_1 = v_1/\|v_1\|$$

とおくと$\|u_1\| = 1$である。つぎに

$$v_2' = v_2 - (v_2 \cdot u_1)u_1, \qquad u_2 = v'_2/\|v'_2\|$$

とおくと$u_1 \cdot u_2 = 0, \qquad \|u_2\| = 1$であり、さらに

$$\langle u_1, u_2 \rangle_R = \langle u_1, v_2 \rangle_R = \langle v_1, v_2 \rangle_R$$

これを続けて、$u_1, \cdots, u_r \ \ (1 \leq r < n)$が求まったとき

$$v'_{r+1} = v_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} (v_{r+1} \cdot u_i)u_i$$

$$u_{r+1} = v'_{r+1}/\|v'_{r+1}\|$$

とおく。$v'_{r+1} \cdot u_i = 0 \ \ (1 \leq i \leq r)$だから、$u_{r+1} \cdot u_i = 0$であり、

$$\begin{aligned}\langle u_1, \cdots, u_r, u_{r+1} \rangle_R &= \langle u_1, \cdots, u_r, v_{r+1} \rangle_R \\ &= \langle v_1, \cdots, v_{r+1} \rangle_R\end{aligned}$$

が成り立っている。これを続けて求める正規直交基底を得る。

シュミットの直交化を用いてR^3の次の基底を正規直交化する

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ とおく

$$u_1 = \frac{1}{\|v_1\|}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v'_2 = v_2 - (v_2 \cdot u_1)u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{4}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\|v'_2\|}v'_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v'_3 = v_3 - (v_3 \cdot u_1)u_1 - (v_3 \cdot u_2)u_2 = \frac{5}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$u_3 = \frac{1}{\|v'_3\|} v'_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

今日の問題

- 次の基底の正規直交化せよ

(1) $$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

(2) $$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(3) $$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

(4) $$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$