１１　固有値

線形代数演習

前回の問題

- 次の基底の正規直交化せよ

(4) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_1 = \frac{1}{\|v_1\|}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v'_2 = v_2 - (v_2 \cdot u_1)u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{6}}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v'_2 = v_2 - (v_2 \cdot u_1)u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v'_3 = v_3 - (v_3 \cdot u_1)u_1 - (v_3 \cdot u_2)u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{6} \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

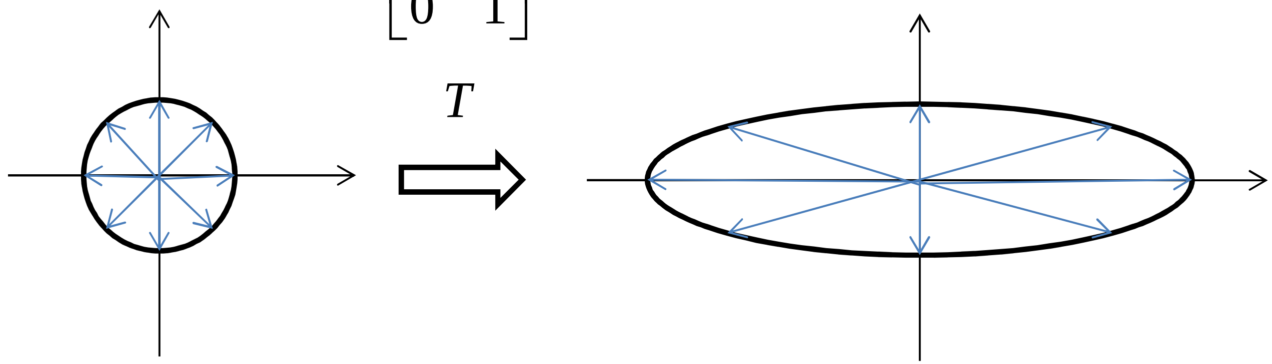
$$v'_4 = v_4 - (v_4 \cdot u_1)u_1 - (v_4 \cdot u_2)u_2 - (v_4 \cdot u_3)u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{12}}\frac{1}{\sqrt{12}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12} \\ 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12} \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{12} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_4 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

固有値と固有ベクトル

TをR^2の線型変換として，次のような行列を考える

$$T(x)=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}x \quad (x\in R^2)$$



$e_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, e_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$を$x$方向に３倍，y方向に1倍に変換

$$T(u)=\lambda u \quad (u\in V, u\neq 0, \lambda\in R)$$

を満たすλをTの固有値，uをTの固有ベクトルという

例

Tは次のようなR^2の線型変換とする

$$T(x) = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} x \quad (x \in R^2)$$

ここで$u = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$とすると

$$T(u) = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 4u$$

であるから，$\lambda = 4$はTの固有値で，

uはTの固有値$\lambda = 4$に属する固有ベクトルである．

固有値の計算

正方行列Aに対し，次の多項式$g_A(t)$をAの固有多項式という

$$g_A(t) = |tE - A|$$

$g_A(t) = 0$の根を複素根も含め行列Aの固有値という

$A = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$とすると$A$の固有多項式は

$$g_A(t) = |tE - A| = \begin{vmatrix} t-7 & 6 \\ -3 & t+2 \end{vmatrix} = t^2 - 5t + 4 = (t-1)(t-4)$$

となる．よってAの固有値は$\lambda = 1,4$である．

今日の提出

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$$

固有値を求めよ

固有値の演習

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & -4 \\ -4 & 8 & 6 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -i & 1 \\ i & 1 & -i \\ 1 & i & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -i \\ -i & 0 & 1 \\ 1 & -i & 0 \end{bmatrix} \quad A_5 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & -i & -i \\ 3+i & 2i & 3i \end{bmatrix} \quad A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_1=\begin{bmatrix}2 & 2 & -6\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 3\end{bmatrix}$$

$$|\lambda E-A_1|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 6\\ 0 & \lambda+1 & -2\\ 0 & 2 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda+1 & -2\\ 2 & \lambda-3\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\{(\lambda+1)(\lambda-3)+4\}$$

$$=(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda+1)$$

$$=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$$

固有値は1，1，2

$$\left|\lambda E - A_2\right| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 4 \\ -2 & \lambda+2 & 4 \\ 4 & -8 & \lambda-6 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda-6) + 0\cdot 4\cdot 4 + 4(-2)(-8)$$

$$-16(\lambda+2) + 32(\lambda-2) - 0(-2)(\lambda-6)$$

$$= (\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda-6) + 0 + 64 - 16\lambda - 32 + 32\lambda - 64 - 0$$

$$= (\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda-6) + 16\lambda - 32$$

$$= (\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda-6) + 16(\lambda-2)$$

$$= (\lambda-2)\left\{\lambda^2 - 4\lambda + 4\right\}$$

$$= (\lambda-2)^3$$

固有値は2，2，2

$$
\left|\lambda E - A_3\right| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & i & -1 \\ -i & \lambda-1 & i \\ -1 & -i & \lambda-1 \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} \lambda-2 & i & -1 \\ 0 & \lambda-1 & i \\ \lambda-2 & -i & \lambda-1 \end{vmatrix}
$$

$$
= (\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & i & -1 \\ 0 & \lambda-1 & i \\ 1 & -i & \lambda-1 \end{vmatrix}
$$

$$
= (\lambda+1)(\lambda-2)^2
$$

固有値は－1，２，２

$$|\lambda E - A_4| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & i \\ i & \lambda & -1 \\ -1 & i & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2(\lambda - 1) + 2i(\lambda - 1) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 2i)$$

$$= (\lambda - 1)\{\lambda + (1 - i)\}\{\lambda - (1 - i)\}$$

$$(1 - i)^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$$

固有値は$1, 1 - i, -1 + i$

$$
\left|\lambda E - A_5\right| = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 2 & 0 \\ 1 & \lambda + i & i \\ -3 - i & -2i & \lambda - 3i \end{bmatrix}
$$

$$
= (\lambda - 1)(\lambda + i)(\lambda - 3i) + 2 - 6i - 2(\lambda - 1) - 2(\lambda - 3i)
$$

$$
= (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2i\lambda - 1) = (\lambda - 1)(\lambda - i)^2
$$

固有値は　$1, i, i$

$$
\left|\lambda E - A_6\right| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 \\ 2 & \lambda + 1 & 0 \\ -3 & -2 & \lambda - 2 \end{vmatrix}
$$

$$
= (\lambda - 2)\left(\lambda^2 + 1\right)
$$

固有値は　$1, \pm i$