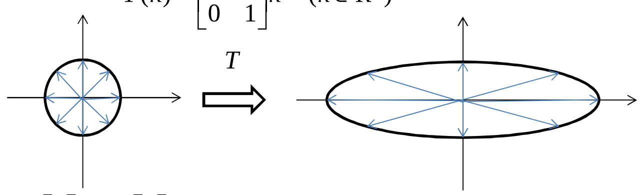
１２　固有ベクトル

線形代数演習

固有値と固有ベクトル

TをR^2の線型変換として，次のような行列を考える

$$T(x)=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}x \quad (x\in R^2)$$



$e_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}, e_2=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$を$x$方向に３倍，y方向に1倍に変換

$$T(u)=\lambda u \quad (u\in V, u\neq 0, \lambda\in R)$$

を満たすλをTの固有値，uをTの固有ベクトルという

前回の解答＋α

$$A=\begin{bmatrix}8 & -10\\ 5 & -7\end{bmatrix}$$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-8 & 10\\ -5 & \lambda+7\end{vmatrix}=(\lambda-8)(\lambda+7)+50=\lambda^2-\lambda-6$$

$$=(\lambda-3)(\lambda+2)=0$$

固有値は$-2,3$である.

固有値が-2のとき

$$\begin{bmatrix}8 & -10\\ 5 & -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}10 & -10\\ 5 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=0$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\quad k\in Z$$

固有値が3のとき

$$\begin{bmatrix}8 & -10\\ 5 & -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}5 & -10\\ 5 & -10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=0$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}\quad k\in Z$$

固有値，固有ベクトルの演習

$$A_1=\begin{bmatrix}2 & 2 & -6\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 3\end{bmatrix}\quad A_2=\begin{bmatrix}2 & 0 & -4\\ 2 & -2 & -4\\ -4 & 8 & 6\end{bmatrix}\quad A_3=\begin{bmatrix}1 & -i & 1\\ i & 1 & -i\\ 1 & i & 1\end{bmatrix}$$

$$A_4=\begin{bmatrix}1 & 0 & -i\\ -i & 0 & 1\\ 1 & -i & 0\end{bmatrix}\quad A_5=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ -1 & -i & -i\\ 3+i & 2i & 3i\end{bmatrix}\quad A_6=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ -2 & -1 & 0\\ 3 & 2 & 2\end{bmatrix}$$

$$A_1=\begin{bmatrix}2&2&-6\\0&-1&2\\0&-2&3\end{bmatrix}\quad |\lambda E-A_1|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&6\\0&\lambda+1&-2\\0&2&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda+1&-2\\2&\lambda-3\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\{(\lambda+1)(\lambda-3)+4\}$$

$$=(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda+1)$$

$$=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$$

固有値は1，1，2

固有値が1の場合

$$\begin{bmatrix}1&2&-6\\0&-2&2\\0&-2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix}1&2&-6\\0&-2&2\\0&-2&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&-6\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-4\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$x_3=k$とおく

$x_2=k$

$x_1=4k$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}4\\1\\1\end{bmatrix}$$

固有値1に対する固有ベクトル

$$A_1=\begin{bmatrix}2&2&-6\\0&-1&2\\0&-2&3\end{bmatrix}\quad |\lambda E-A_1|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&6\\0&\lambda+1&-2\\0&2&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda+1&-2\\2&\lambda-3\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\{(\lambda+1)(\lambda-3)+4\}$$

$$=(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda+1)$$

$$=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$$

固有値は1，1，2

固有値が2の場合

$$\begin{bmatrix}0&2&-6\\0&-3&2\\0&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix}0&2&-6\\0&-3&2\\0&-2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&1&-3\\0&0&-7\\0&0&-5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$x_1=k$とおく

$x_1=0$

$x_2=0$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

固有値2に対する固有ベクトル

$$|\lambda E - A_2| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 4 \\ -2 & \lambda+2 & 4 \\ 4 & -8 & \lambda-6 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda-6) + 0\cdot4\cdot4 + 4(-2)(-8)$$

$$-16(\lambda+2) + 32(\lambda-2) - 0(-2)(\lambda-6)$$

$$= (\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda-6) + 0 + 64 - 16\lambda - 32 + 32\lambda - 64 - 0$$

$$= (\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda-6) + 16\lambda - 32$$

$$= (\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda-6) + 16(\lambda-2)$$

$$= (\lambda-2)\{\lambda^2 - 4\lambda + 4\}$$

$$= (\lambda-2)^3$$

固有値は2，2，2

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 2 & -4 & -4 \\ -4 & 8 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 2 & -4 & -4 \\ -4 & 8 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$x_2 = k$とおく

$x_1 = 2k$

$x_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

固有値2に対する固有ベクトル

固有値が－1の場合

$$|\lambda E - A_3| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & i & -1 \\ -i & \lambda-1 & i \\ -1 & -i & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-2 & i & -1 \\ 0 & \lambda-1 & i \\ \lambda-2 & -i & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & i & -1 \\ 0 & \lambda-1 & i \\ 1 & -i & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1)(\lambda-2)^2$$

固有値は－1，2，2

$$\begin{bmatrix} 2 & -i & 1 \\ i & 2 & -i \\ 1 & i & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -i & 1 \\ i & 2 & -i \\ 1 & i & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \frac{-i}{2} & \frac{1}{2} \\ i & 2 & -i \\ 1 & i & 2 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & \frac{-i}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{-3}{2}i \\ 0 & \frac{3}{2}i & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_3 = k$とおく

$x_1 = -k$

$x_2 = ki$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} -1 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda E - A_3| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & i & -1 \\ -i & \lambda-1 & i \\ -1 & -i & \lambda-1 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} \lambda-2 & i & -1 \\ 0 & \lambda-1 & i \\ \lambda-2 & -i & \lambda-1 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & i & -1 \\ 0 & \lambda-1 & i \\ 1 & -i & \lambda-1 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda+1)(\lambda-2)^2$$

固有値は−1，2，2

固有値が2の場合

$$\begin{bmatrix} -1 & -i & 1 \\ i & -1 & -i \\ 1 & i & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -i & 1 \\ i & -1 & -i \\ 1 & i & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[③+①]{②+①\times i} \begin{bmatrix} -1 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_2 = k_1, x_3 = k_2$とおく

$x_1 = k_1 i - k_2$
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = k_1\begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

固有ベクトル $k_1\begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, k_2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$|\lambda E - A_4| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & i \\ i & \lambda & -1 \\ -1 & i & \lambda \end{vmatrix}$$

$$(1-i)^2 = 1-2i-1 = -2i$$

$$= \lambda^2(\lambda-1) + 2i(\lambda-1) = (\lambda-1)(\lambda^2+2i)$$
$$= (\lambda-1)\{\lambda+(1-i)\}\{\lambda-(1-i)\}$$

固有値は$1, 1-i, -1+i$

固有値1に対して

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ -i & -1 & 1 \\ 1 & -i & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ -i & -1 & 1 \\ 1 & -i & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow③} \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ -i & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix} \xrightarrow[③\times i]{②+①\times i} \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 0 & 1-i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$x_2 = k$とおく $x_1 = ki$

$x_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_4=\begin{bmatrix}1 & 0 & -i\\ -i & 0 & 1\\ 1 & -i & 0\end{bmatrix}$$ 固有値は$1, 1-i, -1+i$

固有値$1-i$に対して

$$\begin{bmatrix}i & 0 & -i\\ -i & -1+i & 1\\ 1 & -i & -1+i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}i & 0 & -i\\ -i & -1+i & 1\\ 1 & -i & -1+i\end{bmatrix}\xrightarrow[③+①\times i]{②+①}\begin{bmatrix}i & 0 & -i\\ 0 & -1+i & 1-i\\ 0 & -i & i\end{bmatrix}\xrightarrow[③\times i]{①\times(-i)}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -1+i & 1-i\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{②+③\times(1-i)}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\xrightarrow{②\leftrightarrow③}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$x_3=k$とおく $x_1=k$, $x_2=k$

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$A_4=\begin{bmatrix}1 & 0 & -i\\ -i & 0 & 1\\ 1 & -i & 0\end{bmatrix}$$ 固有値は$1, 1-i, -1+i$

固有値$-1+i$に対して

$$\begin{bmatrix}2-i & 0 & -i\\ -i & 1-i & 1\\ 1 & -i & 1-i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2-i & 0 & -i\\ -i & 1-i & 1\\ 1 & -i & 1-i\end{bmatrix}\xrightarrow[①+③\times(-2+i)]{②+③\times i}\begin{bmatrix}0 & 1+2i & -1+2i\\ 0 & 2-i & 2+i\\ 1 & -i & 1-i\end{bmatrix}\xrightarrow{②\times\frac{1}{2-i}}\begin{bmatrix}0 & 1+2i & -1+2i\\ 0 & 1 & \frac{2+i}{2-i}\\ 1 & -i & 1-i\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[③+②\times i]{①+②\times(-1-2i)}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{2+i}{2-i}\\ 1 & 0 & \frac{-i}{2-i}\end{bmatrix}\xrightarrow{①\leftrightarrow③}\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{-i}{2-i}\\ 0 & 1 & \frac{2+i}{2-i}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$x_3=k$とおく $x_1=\frac{i}{2-i}k$, $x_2=\frac{-2-i}{2-i}k$

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}\frac{i}{2-i}\\ \frac{-2-i}{2-i}\\ 1\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\\ -\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i\\ 1\end{bmatrix}$$

$$|\lambda E - A_5| = \begin{bmatrix} \lambda-1 & 2 & 0 \\ 1 & \lambda+i & i \\ -3-i & -2i & \lambda-3i \end{bmatrix}$$

$$= (\lambda-1)(\lambda+i)(\lambda-3i) + 2 - 6i - 2(\lambda-1) - 2(\lambda-3i)$$

$$= (\lambda-1)(\lambda^2 - 2i\lambda - 1) = (\lambda-1)(\lambda-i)^2$$

固有値は　$1, i, i$

固有値 1 に対して

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

固有値　i に対して

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} - \frac{2}{5} i \\ -\frac{3}{10} - \frac{1}{10} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda E - A_6| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ 2 & \lambda+1 & 0 \\ -3 & -2 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)(\lambda^2+1) = (\lambda-2)(\lambda-i)(\lambda+i)$$

固有値は　$2, \pm i$

固有値　2に対して

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

固有値　i に対して

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} i \\ -1-i \\ 1 \end{bmatrix}$$

固有値　$-i$ に対して

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} -i \\ -1+i \\ 1 \end{bmatrix}$$