１３　行列の対角化１

線形代数演習

同値な行列

- ２つのn次正方行列A, Bが同値であるとは
$$B = P^{-1}AP$$
となる正則行列Pが存在するときにいう.

行列の対角化とは，正則行列Pと対角行列Bをもとめることをいう

例題

$$A=\begin{bmatrix}8 & -10\\ 5 & -7\end{bmatrix}, P=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$ とすると，

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$ であることを確かめ

これを用いて，A^nを計算せよ．

$$B=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8 & -10\\ 5 & -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

Bは対角行列だから，B^nの計算は簡単で

$$B^n=\begin{bmatrix}(-2)^n & 0\\ 0 & 3^n\end{bmatrix}$$

$$A^n=(PBP^{-1})\cdots(PBP^{-1})=PB^nP^{-1}$$

例題

$$A=\begin{bmatrix}5 & 6 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}$$ が対角されるか調べ，対角化ができれば対角化せよ

Aの固有多項式は

$$g_A(t)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-5 & -6 & 0\\ 1 & \lambda & 0\\ -1 & -2 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-3)$$

となるから，T_Aの固有値は$\lambda=2,3$である．T_Aの各固有値の固有空間 を求める

$\lambda=2$のとき

$$\begin{bmatrix}-3 & -6 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ -1 & -2 & 0\end{bmatrix}x=0$$ を解き，$W(2;T_A)=\left\{a\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\middle| a,b\in R\right\}$

$\lambda=3$のとき

$$\begin{bmatrix}-2 & -6 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ -1 & -2 & 1\end{bmatrix}x=0\text{を解き，}\quad W(3;T_A)=\left\{a\begin{bmatrix}3\\-1\\1\end{bmatrix}\middle| a\in R\right\}$$

したがって，$\dim(W(2;T_A))+\dim(W(3;T_A))=2+1=3$となるので，
Aは対角化される．さらに，$W(2;T_A)$と$W(3;T_A)$の基底を用いて

$$P=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 3\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\text{とおくと}B=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

注意　行列の対角化に現れるP,Bは1通りではない．たとえば

$$P=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\text{とおくと}B=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

ただし対角化された行列の対角成分は順序の違いを除き一定である.

問題

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$$が対角されるか調べ，対角化ができれば対角化せよ

$$A_1=\begin{bmatrix}7 & -6\\ 3 & -2\end{bmatrix}\qquad A_2=\begin{bmatrix}13 & -30\\ 5 & -12\end{bmatrix}\qquad A_3=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$A_4=\begin{bmatrix}-3 & -2 & -2\\ 4 & 3 & 2\\ 8 & 4 & 5\end{bmatrix}\qquad A_5=\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 2\\ -2 & 2 & -1\end{bmatrix}\qquad A_6=\begin{bmatrix}2 & -2 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$A_6=\begin{bmatrix}2 & -1 & 4\\ 0 & 1 & 4\\ -3 & 3 & -1\end{bmatrix}$$