# １４　行列の対角化２

線形代数演習

# 問題

対角されるか調べ，対角化ができれば対角化せよ

$$A_1 = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 13 & -30 \\ 5 & -12 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 8 & 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad A_6 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_7 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_1=\begin{bmatrix}7 & -6\\ 3 & -2\end{bmatrix}$$

$A_1$の固有多項式は

$$g_A(t)=|\lambda E-A|=\begin{bmatrix}\lambda-7 & 6\\ -3 & \lambda+2\end{bmatrix}=(\lambda-7)(\lambda+2)+9=\lambda^2-5\lambda+4=(\lambda-1)(\lambda-4)$$

となるから，$T_A$の固有値は$\lambda=1,4$である．$T_A$の各固有値の固有空間を求める

$\lambda=1$のとき

$$\begin{bmatrix}6 & -6\\ 3 & -3\end{bmatrix}x=0\text{を解き}\begin{bmatrix}6 & -6\\ 3 & -3\end{bmatrix}\xrightarrow{①\times\frac{1}{6}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & -3\end{bmatrix}\xrightarrow{②+①\times(-3)}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\qquad W(1;T_A)=\left\{a\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\middle| a\in R\right\}$$

$\lambda=4$のとき

$$\begin{bmatrix}3 & -6\\ 3 & -6\end{bmatrix}x=0\text{を解き}\begin{bmatrix}3 & -6\\ 3 & -6\end{bmatrix}\xrightarrow{①\times\frac{1}{3}}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & -6\end{bmatrix}\xrightarrow{②+①\times(-3)}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 0\end{bmatrix}\qquad W(4;T_A)=\left\{a\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}\middle| a\in R\right\}$$

$$p=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\qquad P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & -6\\ 3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$$

$$A_2=\begin{bmatrix}13 & -30\\ 5 & -12\end{bmatrix}$$

$A_2$の固有多項式は

$$g_A(t)=|\lambda E-A|=\begin{bmatrix}\lambda-13 & 30\\ -5 & \lambda+12\end{bmatrix}=(\lambda-13)(\lambda+12)+150=\lambda^2-\lambda-6=(\lambda-3)(\lambda+2)$$

となるから，$T_A$の固有値は$\lambda=3,-2$である．$T_A$の各固有値の固有空間を求める

$\lambda=3$のとき

$$\begin{bmatrix}10 & -30\\ 5 & -15\end{bmatrix}x=0\text{を解き}\begin{bmatrix}10 & -30\\ 5 & -15\end{bmatrix}\xrightarrow{①\times\frac{1}{10}}\begin{bmatrix}1 & -3\\ 5 & -15\end{bmatrix}\xrightarrow{②+①\times(-5)}\begin{bmatrix}1 & -3\\ 0 & 0\end{bmatrix}\qquad W(3;T_A)=\left\{a\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}\middle| a\in R\right\}$$

$\lambda=-2$のとき

$$\begin{bmatrix}15 & -30\\ 5 & -10\end{bmatrix}x=0\text{を解き}\begin{bmatrix}15 & -30\\ 5 & -10\end{bmatrix}\xrightarrow{①\times\frac{1}{15}}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 5 & -10\end{bmatrix}\xrightarrow{②+①\times(-5)}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 0\end{bmatrix}\qquad W(-2;T_A)=\left\{a\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}\middle| a\in R\right\}$$

$$p=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\qquad P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}13 & -30\\ 5 & -12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$$

$$A_3=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

$A_3$の固有多項式は

$$g_A(t)=|\lambda E-A|=\begin{bmatrix}\lambda-2 & 3\\ 1 & \lambda-2\end{bmatrix}=(\lambda-2)^2-3=\lambda^2-4\lambda+1=(\lambda-(2+\sqrt{3}))(\lambda-(2-\sqrt{3}))$$

となるから，$T_A$の固有値は$\lambda=2+\sqrt{3},2-\sqrt{3}$である．$T_A$の各固有値の固有空間を求める

$\lambda=2+\sqrt{3}$のとき

$$\begin{bmatrix}-\sqrt{3} & -3\\ -1 & -\sqrt{3}\end{bmatrix}x=0\text{を解き}\begin{bmatrix}-\sqrt{3} & -3\\ -1 & -\sqrt{3}\end{bmatrix}\xrightarrow{①\times\frac{-1}{\sqrt{3}}}\begin{bmatrix}1 & \sqrt{3}\\ -1 & -\sqrt{3}\end{bmatrix}\xrightarrow{②+①}\begin{bmatrix}1 & \sqrt{3}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\quad W(2+\sqrt{3};T_A)=\left\{a\begin{bmatrix}-\sqrt{3}\\ 1\end{bmatrix}\middle| a\in R\right\}$$

$\lambda=2-\sqrt{3}$のとき

$$\begin{bmatrix}\sqrt{3} & -3\\ -1 & \sqrt{3}\end{bmatrix}x=0\text{を解き}\quad\begin{bmatrix}\sqrt{3} & -3\\ -1 & \sqrt{3}\end{bmatrix}\xrightarrow{①\times\frac{1}{\sqrt{3}}}\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ -1 & \sqrt{3}\end{bmatrix}\xrightarrow{②+①}\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\quad W(2-\sqrt{3};T_A)=\left\{a\begin{bmatrix}\sqrt{3}\\ 1\end{bmatrix}\middle| a\in R\right\}$$

$$p=\begin{bmatrix}-\sqrt{3} & \sqrt{3}\\ 1 & 1\end{bmatrix}\qquad P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\frac{-\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\sqrt{3} & \sqrt{3}\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+\sqrt{3} & 0\\ 0 & 2-\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 8 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$A_4$の固有多項式は

$$g_A(t) = |\lambda E - A| = \begin{bmatrix} \lambda+3 & 2 & 2 \\ -4 & \lambda-3 & -2 \\ -8 & -4 & \lambda-5 \end{bmatrix}$$

$$= (\lambda+3)(\lambda-3)(\lambda-5)+64+16(\lambda-3)+8(\lambda-5)-8(\lambda+3)$$

$$= (\lambda+3)(\lambda-3)(\lambda-5)+16(\lambda-3) = (\lambda-3)(\lambda^2-2\lambda+1) = (\lambda-3)(\lambda-1)^2$$

となるから，$A$の固有値は$\lambda=1,1,3$である．$A$の各固有値の固有空間を求める

$\lambda=1$のとき

$$\begin{bmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 8 & 4 & 4 \end{bmatrix} x = 0 \text{を解き} \quad \begin{bmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 8 & 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{①\times\frac{-1}{2}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 8 & 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[③+④\times(-4)]{②+①\times(-2)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda=3$のとき

$$\begin{bmatrix} -6 & -2 & -2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 8 & 4 & 2 \end{bmatrix} x = 0 \text{を解き} \quad \begin{bmatrix} -6 & -2 & -2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 8 & 4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[③\times\frac{1}{2}]{\substack{①\times\frac{-1}{2} \\ ②\times\frac{1}{2}}} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[③+②\times(-2)]{①+②\times(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[③+②\times(-2)]{②+①\times(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W(1;T_A) = \left\{ a\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \middle| a,b \in R \right\} \qquad W(3;T_A) = \left\{ a\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \middle| a \in R \right\}$$

$$p = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 2 & 1 & 1/2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 8 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_5=\begin{bmatrix}2&-1&2\\1&0&2\\-2&2&-1\end{bmatrix}$$

$A_5$の固有多項式は

$$g_A(t)=|\lambda E-A|=\begin{bmatrix}\lambda-2&1&-2\\-1&\lambda&-2\\2&-2&\lambda+1\end{bmatrix}$$

$$=\lambda(\lambda-2)(\lambda+1)-8+4\lambda-4(\lambda-2)+(\lambda+1)$$

$$=\lambda(\lambda-2)(\lambda+1)+\lambda+1=(\lambda+1)(\lambda-1)^2$$

となるから，$A$の固有値は$\lambda=1,1,-1$である．$A$の各固有値の固有空間を求める

$\lambda=1$のとき

$\begin{bmatrix}1&-1&2\\1&-1&2\\-2&2&-2\end{bmatrix}x=0$を解き $\begin{bmatrix}1&-1&2\\1&-1&2\\-2&2&-2\end{bmatrix}\xrightarrow[③+②\times2]{②+①\times(-1)}\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&0&0\\0&0&2\end{bmatrix}\xrightarrow{③\times(\frac{1}{2})}\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{①+③\times(-2)}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$\lambda=-1$のとき

$\begin{bmatrix}3&-1&2\\1&1&2\\-2&2&0\end{bmatrix}x=0$を解き $\begin{bmatrix}3&-1&2\\1&1&2\\-2&2&0\end{bmatrix}\xrightarrow[③+②\times2]{①+②\times(-3)}\begin{bmatrix}0&-4&-4\\1&1&2\\0&4&4\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$

$$W(1;T_A)=\left\{a\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\middle|a\in R\right\}\qquad W(-1;T_A)=\left\{a\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}\middle|a\in R\right\}$$

$\dim(W(1;T_A))+\dim(W(-1;T_A))=2$　　**対角化できない**

$$A_6 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$A_6$の固有多項式は

$$g_A(t) = |\lambda E - A| = \begin{bmatrix} \lambda-2 & 2 & 2 \\ 0 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{bmatrix}$$

$$= (\lambda-2)^2(\lambda-1)$$

となるから，$A$の固有値は$\lambda=1,2$である．$A$の各固有値の固有空間を求める

$\lambda=1$のとき

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x = 0 \text{を解き} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda=2$のとき

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x = 0 \text{を解き} \qquad \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W(1;T_A) = \left\{ a \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| a \in R \right\} \qquad W(2;T_A) = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| a,b \in R \right\}$$

$$p = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

# 模擬試験

## Ⅰ．次の行列方程式の解を求めよ

①
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

②
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

③
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 9 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## Ⅱ．逆行列を求めよ

①
$$\begin{pmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 3 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

②
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

## Ⅲ．次のベクトルの組は線形独立か従属か調べよ

①　$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$

②　$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

模擬試験

Ⅳ．次のベクトルの組から正規直交基底を求めよ

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Ⅴ．次の行列の固有値，固有ベクトルを求め，対角化行列Pを示し，対角化せよ

$$A_7 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_7=\begin{bmatrix}2&-1&4\\0&1&4\\-3&3&-1\end{bmatrix}$$

$A_7$の固有多項式は

$$g_A(t)=|\lambda E-A|=\begin{bmatrix}\lambda-2&1&-4\\0&\lambda-1&-4\\3&-3&\lambda+1\end{bmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1)-12+12(\lambda-1)-12(\lambda-2)$$

$$=(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1)$$

となるから， $A$の固有値は $\lambda=-1,1,2$である． $A$の各固有値の固有空間 を求める

$\lambda=-1$のとき

$$\begin{bmatrix}3&-1&4\\0&2&4\\-3&3&0\end{bmatrix}x=0\text{を解き}\begin{bmatrix}3&-1&4\\0&2&4\\-3&3&0\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{②\times(\frac{1}{2})\\③\times(\frac{1}{3})}]{①+③}\begin{bmatrix}0&2&4\\0&1&2\\1&-1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}\qquad W(-1;T_A)=\left\{a\begin{bmatrix}-2\\-2\\1\end{bmatrix}\middle|a\in R\right\}$$

$\lambda=1$のとき

$$\begin{bmatrix}1&-1&4\\0&0&4\\-3&3&-2\end{bmatrix}x=0\text{を解き}\begin{bmatrix}1&-1&4\\0&0&4\\-3&3&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\-3&3&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad W(1;T_A)=\left\{a\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\middle|a\in R\right\}$$

$\lambda=2$のとき

$$\begin{bmatrix}0&-1&4\\0&-1&4\\-3&3&-3\end{bmatrix}x=0\text{を解き}\begin{bmatrix}0&-1&4\\0&-1&4\\-3&3&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&1&-4\\0&0&0\\1&-1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-3\\0&1&-4\\0&0&0\end{bmatrix}\qquad W(2;T_A)=\left\{a\begin{bmatrix}3\\4\\1\end{bmatrix}\middle|a\in R\right\}$$

$$p=\begin{bmatrix}-2&1&3\\-2&1&4\\1&0&1\end{bmatrix}\qquad P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&-1&1\\6&-5&2\\-1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1&4\\0&1&4\\-3&3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&1&3\\-2&1&4\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$